Eliminación Gaussiana con pivote parcial

Luis Rández

Dpto. Matemática Aplicada
Facultad de Ciencias
Universidad de Zaragoza

Ejemplo.-

Considerar el sistema lineal

$$\begin{aligned} 1.00 \times 10^{-4} x_1 + 1.00 x_2 &= 1.00 \\ 1.00 x_1 + 1.00 x_2 &= 2.00 \end{aligned}$$

cuya solución exacta es $x_1 = 1.00010001\ldots$, $x_2 = 0.99989998\ldots$.
Se trata de resolver el sistema lineal anterior con aritmética de tres dígitos significativos utilizando eliminación Gaussiana con/sin pivote parcial.

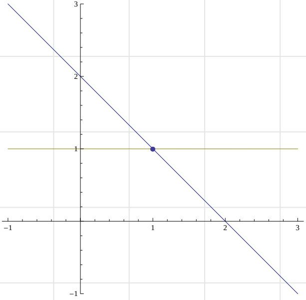

Fig. 1.- Geometría inicial del problema

Sin pivote

Sea la matriz ampliada $\overline{A}$

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 1.00 \times 10^{-4} & 1.00 & 1.00 \\ 1.00 & 1.00 & 2.00 \end{array}\right],$$

Sin pivote

y ahora construimos la matriz L_1

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 \\ -1.00 \times 10^4 & 1.00 \end{bmatrix}$$

Sin pivote

dando lugar al sistema triangular superior

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 1.00 \times 10^{-4} & 1.00 & 1.00 \\ 0.00 & 1.00 - 1.00 \times 10^4 & 2.00 - 1.00 \times 10^4 \end{array} \right],$$

Sin pivote

y con la aritmética empleada

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 1.00 \times 10^{-4} & 1.00 & 1.00 \\ 0.00 & -1.00 \times 10^{4} & -1.00 \times 10^{4} \end{array}\right],$$

Sin pivote

tiene por solución $x_2 = 1.00$ y $x_1 = \dfrac{1.00 - 1.00}{1.00 \times 10^{-4}} = 0.00$

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 1.00 \times 10^{-4} & 1.00 & 1.00 \\ 0.00 & -1.00 \times 10^{4} & -1.00 \times 10^{4} \end{array} \right],$$

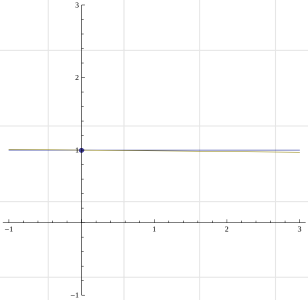

Fig. 2.- Geometria final del problema

Con pivote

Considerar la matriz ampliada con las filas permutadas $\overline{A}$

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 1.00 & 1.00 & 2.00 \\ 1.00 \times 10^{-4} & 1.00 & 1.00 \end{array}\right],$$

Con pivote

y ahora construimos la matriz L_1

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 \\ -1.00 \times 10^{-4} & 1.00 \end{bmatrix}$$

Con pivote

dando lugar al sistema triangular superior

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 1.00 & 1.00 & 2.00 \\ 0.00 & 1.00 - 1.00 \times 10^{-4} & 1.00 - 2.00 \times 10^{-4} \end{array} \right],$$

Con pivote

y con la aritmética empleada

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 1.00 & 1.00 & 2.00 \\ 0.00 & 1.00 & 1.00 \end{array} \right],$$

Con pivote

tiene por solución $x_2 = 1.00$ y $x_1 = \dfrac{2.00 - 1.00}{1.00} = 1.00$

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 1.00 & 1.00 & 2.00 \\ 0.00 & 1.00 & 1.00 \end{array}\right],$$

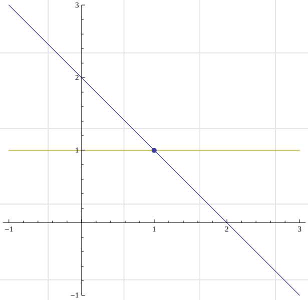

Fig. 2.- Geometría final del problema

Ejemplo.-

Sea el sistema lineal $Ax = b$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \\ -4 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Consideremos ahora la matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 0 & 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Ejemplo.-

Sea el sistema lineal $Ax = b$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \\ -4 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Consideremos ahora la matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{0} & 2 & 1 & 2 & 5 \\ \mathbf{1} & 0 & 1 & 3 & 5 \\ \mathbf{3} & 1 & -4 & 2 & 2 \\ \mathbf{-4} & 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

El pivote hay que escogerlo en la primera columna

Ejemplo.-

Sea el sistema lineal $Ax = b$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \\ -4 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Consideremos ahora la matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{0} & 2 & 1 & 2 & 5 \\ \mathbf{1} & 0 & 1 & 3 & 5 \\ \mathbf{3} & 1 & -4 & 2 & 2 \\ \color{red}{\mathbf{-4}} & 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Es -4 por lo que se permutan las filas 1 y 4 $\quad (1 \leftrightarrow 4)$

Ejemplo.-

Sea el sistema lineal $Ax = b$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \\ -4 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Consideremos ahora la matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} -4 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right] \qquad L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ya están permutadas y construimos L_1

Ejemplo.-

Sea el sistema lineal $Ax = b$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \\ -4 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Consideremos ahora la matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} -4 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5/4 & 13/4 & 9/2 \\ 0 & 1 & -13/4 & 11/4 & 1/2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

Quedando tras la primera etapa

Ejemplo.-

Sea el sistema lineal $Ax = b$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \\ -4 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Consideremos ahora la matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} -4 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & \mathbf{0} & 5/4 & 13/4 & 9/2 \\ 0 & \mathbf{1} & -13/4 & 11/4 & 1/2 \\ 0 & \mathbf{2} & 1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

El siguiente pivote hay que escogerlo en la segunda columna

Ejemplo.-

Sea el sistema lineal $Ax = b$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \\ -4 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Consideremos ahora la matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -4 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & \mathbf{0} & 5/4 & 13/4 & 9/2 \\ 0 & \mathbf{1} & -13/4 & 11/4 & 1/2 \\ 0 & \mathbf{2} & 1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

Es 2 por lo que se permutan las filas 2 y 4 $\quad (2 \leftrightarrow 4)$

Ejemplo.-

Sea el sistema lineal $Ax = b$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \\ -4 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Consideremos ahora la matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -4 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -13/4 & 11/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 5/4 & 13/4 & 9/2 \end{array}\right] \qquad L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ya están permutadas y construimos L_2

Ejemplo.-

Sea el sistema lineal $Ax = b$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \\ -4 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Consideremos ahora la matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -4 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -15/4 & 7/4 & -2 \\ 0 & 0 & 5/4 & 13/4 & 9/2 \end{array}\right]$$

Quedando tras la segunda etapa

Ejemplo.-

Sea el sistema lineal $Ax = b$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \\ -4 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Consideremos ahora la matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} -4 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -\mathbf{15/4} & 7/4 & -2 \\ 0 & 0 & \mathbf{5/4} & 13/4 & 9/2 \end{array}\right]$$

El siguiente pivote hay que escogerlo en la tercera columna

Ejemplo.-

Sea el sistema lineal $Ax = b$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \\ -4 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Consideremos ahora la matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -4 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{-15/4} & 7/4 & -2 \\ 0 & 0 & \mathbf{5/4} & 13/4 & 9/2 \end{array}\right]$$

Es $-15/4$ por lo que no hay que permutar en esta ocasión

Ejemplo.-

Sea el sistema lineal $Ax = b$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \\ -4 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Consideremos ahora la matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -4 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -15/4 & 7/4 & -2 \\ 0 & 0 & 5/4 & 13/4 & 9/2 \end{array}\right] \qquad L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

Construimos L_3

Ejemplo.-

Sea el sistema lineal $Ax = b$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \\ -4 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Consideremos ahora la matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} -4 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -15/4 & 7/4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 23/6 & 23/6 \end{array}\right]$$

Obteniendo el sistema lineal triangular superior equivalente

En ocasiones, la eliminación Gaussiana con pivote parcial puede no resultar conveniente. Sea la siguiente matriz *hueca*, cuya estructura viene dada en la figura (1), donde los elementos de la diagonal son *pequeños* en valor absoluto, por lo que sería necesario permutar filas.

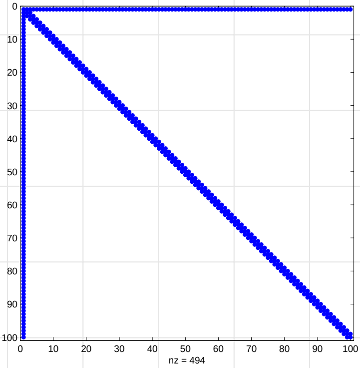

Fig. 1.- Estructura *hueca* de la matriz

En la figura (2) se ve que la matriz U se llena completamente de elementos no nulos, por lo que sería necesario reservar bastante memoria para su almacenamiento.

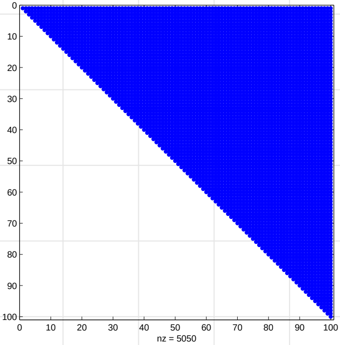

Fig. 2.- LLenado de la matriz U