

1. Hallar el polinomio de interpolación por los métodos de Lagrange y de Newton de los datos $(-2, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, -1)$. Escribirlos en la forma $a_0 + a_1x + a_2x^2$ para verificar que son idénticos.

2. Encuentre el polinomio de interpolación que pasa por los puntos

$$(-1, -1), \quad (0, 3), \quad (1, 5), \quad (2, 11).$$

3. Halle el polinomio de grado mínimo que interpola los datos

$$f(-2) = -1, \quad f(0) = 1, \quad f(1) = 2, \quad f(2) = 4.$$

4. Encuentre el polinomio de interpolación que pasa por los puntos

$$(-1, 5), \quad (1, -1), \quad (2, -7), \quad (3, -23).$$

5. El polinomio $p_3(x) = 2 - (x+1) + x(x+1) - 2x(x+1)(x-1)$ interpola los primeros cuatro datos de la tabla

x_i	-1	0	1	2	3
$f(x_i)$	2	1	2	-7	10

Añada un término más a $p_3(x)$ de manera que el polinomio resultante interpola a la tabla entera.

6. Calcular el polinomio de grado menor o igual que 3 que interpole una función $f(x)$ impar, tal que $f(1) = 2$ y además verifica:

$$\int_0^1 f(t) dt = 1/3.$$

7. Halle los polinomios de interpolación para los siguientes casos:

a)	$f(0) = 0$	$f'(0) = 0$	$f(1) = 1$	$f'(1) = 1$
b)	$f(-1) = 2$	$f'(-1) = -1$	$f(2) = 1$	$f'(2) = 0$

8. Demostrar que en el problema de interpolación de Lagrange se verifican las siguientes propiedades:

- a) Los polinomios de la base de Lagrange verifican

$$\sum_{k=0}^n \mathcal{L}_{nk}(x) = 1.$$

- b) Si $p_n(x)$ es el polinomio de interpolación de $f(x)$ en los puntos $x_0, x_1, \dots, x_n$ (distintos), entonces, el error puede escribirse como:

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x) = \sum_{k=0}^n (f(x) - f(x_k)) \mathcal{L}_{nk}(x).$$

9. Hallar el polinomio de interpolación de grado ≤ 2 a la función $f(x) = \cos(x)$ en los puntos $x = 0, 1/2, 1$. Calcular el error de interpolación y dar una cota del error cometido en $x = 3/4$.
10. Sea la tabla de datos correspondientes a la función $f(x) = e^x$

x_i	0	0.2	0.4	0.6
$f(x_i)$	1.0000	1.2214028	1.4918247	1.8221188

- a) Para la interpolación lineal en $x = 1/3$ que intervalo tomarías. Da una cota del error absoluto y compara con el resultado exacto.
- b) Calcula el polinomio de interpolación de grado ≤ 3 , dando una cota del error cometido y comparando con el resultado exacto.
- c) Aproxima el valor de $\exp(4/5)$ con el polinomio de interpolación cúbico hallando el error. Razona a que es debido que el error anterior sea tan grande comparado con el obtenido en b).
11. Calcular el polinomio de grado ≤ 4 que interpola $f(x) = \cos(x)$ en $\{0, 1, 2, 3 \text{ y } 4\}$.
12. Hallar el valor de la siguientes sumas:
- a) $1 + 2 + \dots + n$
- b) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$
- c) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$
13. Hallar el siguiente valor en las sucesiones
- a) 7, 18, 29, 40, 51, 62, ...
- b) 13, 1, 49, 40, 76, 70, 94, 91, ...

1. Demostrar que la función $f(x) = \frac{x^2}{e^x} - 1$ tiene una única raíz en $\mathbb{R}$.
2. Considerar la ecuación no lineal $f(x) = e^{2x} + 3x + 2$. Probar que $f(x)$ tiene una única raíz en $\mathbb{R}$. Determinar un intervalo en el que se encuentre y aplicar 3 iteraciones del método de bisección.
3. Se quiere calcular una raíz de la ecuación $f(x) = x^3 + 2x - 1 = 0$ en el intervalo $[1/4, 1/2]$.
 - (a) Estudia la existencia y unicidad de la misma en dicho intervalo.
 - (b) Aplica cinco iteraciones del método de bisección. Calcula una cota sobre el error cometido. Halla el número de iteraciones necesarias para que el error absoluto sea menor que 10^{-4} , 10^{-6} , 10^{-8} y 10^{-10} .
4. Encontrar una función que tenga una raíz en $\sqrt{30}$. Buscar un intervalo de longitud menor o igual que 1 que localice la raíz y donde se pueda garantizar la convergencia del método de Newton. Aplicar tres iteraciones comenzando con cada uno de los extremos.
5. Repetir el ejercicio anterior para la función $f(x) = x^3 + 5e^x + 3 = 0$ en el intervalo $[-2, -1]$.
6. En Astronomía se conoce como ecuación de Kepler a la siguiente expresión

$$M = x - e \operatorname{sen} x, \quad 0 < e < 1,$$

Demostrar que para cada $M \in (0, \pi)$ existe un único x que satisface dicha ecuación.

7. El método de Newton para resolver cierta ecuación $f(x) = 0$ viene dado por

$$\begin{cases} x_0 \text{ arbitrario} \\ x_{n+1} = \frac{x_n^2}{2x_n - 1}, \quad n \geq 0. \end{cases}$$

Determinar la función $f(x)$.

8. Utilizando el método de Newton para resolver la ecuación $x^2 = a$, con $a > 0$, deducir el algoritmo siguiente para calcular la raíz cuadrada de a :

$$\begin{cases} x_0 \text{ arbitrario} \neq 0 \\ x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right), \quad n \geq 0. \end{cases}$$

9. Demostrar que el método de Newton para calcular una raíz de multiplicidad k de un polinomio $p(x)$ tiene convergencia lineal. Sin embargo, si se modifica el método de Newton de la forma

$$\begin{cases} x_0 \text{ arbitrario} \\ x_{n+1} = x_n - k \frac{p(x_n)}{p'(x_n)}, \quad n \geq 0. \end{cases}$$

vuelve a tener convergencia cuadrática.

10. Considerar la función $f(x) = 1/x - a$. Aplicar el método de Newton, viendo que no es preciso realizar ninguna división. Hallar la relación entre el error $e_{n+1} = x_{n+1} - 1/a$ y e_n .
11. Una persona pide un crédito de 10000 € a 15 años pagando una mensualidad de 80 €. Hallar el tipo de interés.
12. El crecimiento de una población de bacterias, en función del tiempo t , está dado por $p(t) = 100 e^{0.1t} - 0.005t$. Determinar el instante t en el que la población sea de 500.
13. Determinar las ecuaciones reales para la iteración $z_{k+1} = z_k^2 + 2$, siendo z complejo.
14. Aplicar el método de Newton a la función $f(x) = x e^{-x}$ partiendo de $x_0 = 0.5$ y de $x_0 = 2$.
15. Aplicar el método de Newton al polinomio $p(x) = x^3 - x - 3$ con $x_0 = 0$. ¿Que es lo que ocurre?

1. Calcule las siguientes primitivas

$$\begin{array}{lll}
 \int \sqrt{x\sqrt{x}} \, dx & \int \frac{\log x}{x} \, dx & \int (2x+1)^n \, dx \\
 \int \frac{x}{x^2+4} \, dx & \int \sqrt{x+2} \, dx & \int \tan x \, dx \\
 \int e^{5x} \, dx & \int \frac{1}{3x-7} \, dx & \int \frac{x}{2x^2+5} \, dx \\
 \int \frac{x^2}{x^3+5} \, dx & \int \frac{x+1}{x^2+2x+3} \, dx & \int (x+2)e^{x^2+4x-5} \, dx \\
 \int (4-x^{2/3})^3 \, dx & \int \left(\frac{\sqrt{x}}{x} - 3x^{4/3} + 1\right) \, dx & \int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2} \, dx \\
 \int x \operatorname{arctag}(x) \, dx & \int x^3 \log x \, dx & \int \arcsen(x) \, dx \\
 \int x e^x \, dx & \int x^2 e^x \, dx & \int x \cos x \, dx \\
 \int x^2 \cos x \, dx & \int (3x^2-4x-1) \cos x \, dx & \int e^x \cos x \, dx \\
 \int \frac{x^4}{(1-x)^3} \, dx & \int \frac{1}{x(x+1)(x^2-4)} \, dx & \int \frac{x}{x^2-3x-4} \, dx \\
 \int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} \, dx & \int \frac{1}{(x^2+1)(x+1)} \, dx & \int \frac{1}{x^3+x} \, dx
 \end{array}$$

2. Calcular las siguientes primitivas aplicando la regla de Barrow:

$$\begin{array}{lll}
 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} \, dx & \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos x + \operatorname{sen} x} \, dx & \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x} \, dx \\
 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} \, dx & \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} \, dx & \int_{-2}^{-1} \frac{1}{(11+5x)^3} \, dx
 \end{array}$$

3. Calcular las siguientes integrales

$$\begin{array}{l}
 \int_0^2 f(x) \, dx, \text{ con } f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in [0, 1] \\ x & x \in [1, 2] \end{cases} \\
 \int_0^2 |1-x| \, dx, \quad \int_a^b \frac{x}{|x|} \, dx, \quad \int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos(2x)} \, dx.
 \end{array}$$

4. Hallar $F'(x)$ en los casos siguientes:

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} \, dt, \quad F(x) = \int_x^1 \sqrt{1-t^2} \, dt, \quad F(x) = \int_{\cos x}^0 \frac{1}{2+t} \, dt$$

5. Hallar la aproximación lineal y la cuadrática de la función $f(x) = 2 + \int_0^x \frac{10}{1+t} \, dt$ en el origen.

6. Hallar la longitud de los siguientes arcos de curva

$$f(x) = \sqrt{x^3}, \text{ en } [0, 4]; \quad f(x) = x^2, \text{ en } [0, 3]; \quad f(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t), \text{ en } [0, 4\pi].$$

1. Evaluar las siguientes integrales iteradas:

$$\int_1^2 \int_{-x^2}^{x^2} (8x - 10y + 2) \, dy \, dx, \quad \int_0^\pi \int_y^{3y} \cos(2x + y) \, dx \, dy,$$

$$\int_1^2 \int_1^y \frac{y}{x} \, dx \, dy, \quad \int_\pi^{2\pi} \int_0^x (\cos x - \sin y) \, dy \, dx.$$

2. Calcular $\iint_D (x^2 + xy + y^2) \, dx \, dy$, donde D es el rectángulo: $a \leq x < b$, $c \leq y < d$.
3. $\iint_D x \, dx \, dy$, donde D es un triángulo cuyos vértices son los puntos $O(0,0)$, $A(1,1)$ y $O(0,1)$.
4. $\iint_D e^{x/y} \, dx \, dy$, donde D es el triángulo mixtilíneo OAB , limitado por la parábola $y^2 = x$ y por las rectas $x = 0$ e $y = 1$.
5. Calcular las siguientes integrales y dibuje los recintos a que se extienden

$$a) \int_0^\pi dx \int_0^{1+\cos x} y^2 \sin x \, dy, \quad b) \int_0^{\pi/2} dx \int_{\cos x}^1 y^4 \, dy.$$

6. Calcular el valor de $\iint_D (x^2 + 2y) \, dx \, dy$, sobre el área plana limitada por $y = x$, y la parábola $y = 4x - x^2$.
7. Calcular $\iint_D (x^2 - y^2) \, dx \, dy$, siendo D la región limitada por $y = \sin x$ y el intervalo $x \in [0, \pi]$.
8. Hallar el valor de $\iint_D \sqrt{a^2 - x^2} \, dx \, dy$, extendida al primer cuadrante de $x^2 + y^2 = a^2$.
9. Calcular $\iint_D x \, dx \, dy$, siendo D la región determinada por las siguientes condiciones:

$$D = \{x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x^2 + y^2 = 10, \quad xy = 3\}.$$

10. Calcular $\iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy$, siendo D la región determinada por las siguientes condiciones:

$$D = \{x^2 + y^2 - x < 0, \quad x^2 + y^2 - y < 0, \quad y > 0\}.$$

11. Calcular $\iint_D x \sin x \, dx \, dy$, siendo D la región

$$D = \{(x, y) \mid x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq R^2, \quad x^2 + y^2 \geq r^2, \quad r < R\}.$$

12. $\iint_D xy \, dx \, dy$, siendo D la región delimitada por $\{x^2 = y, \quad x^2 = 2y, \quad y^2 = x, \quad y^2 = 2x\}$.

13. En los siguientes problemas, dibujar la región de integración de la integral iterada

$$(a) \int_0^2 \int_1^{2x+1} f(x, y) \, dy \, dx, \quad (c) \int_{-1}^3 \int_0^{\sqrt{16-y^2}} f(x, y) \, dy \, dx,$$

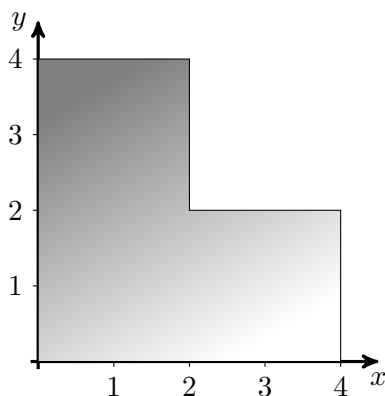
$$(b) \int_1^4 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) \, dx \, dy, \quad (d) \int_{-1}^2 \int_{-x^2}^{x^2+1} f(x, y) \, dy \, dx$$

14. En los siguientes problemas evalúa la integral doble en la región $\mathcal{R}$ limitada por las gráficas de las ecuaciones indicadas. Elegir el orden de integración más conveniente:

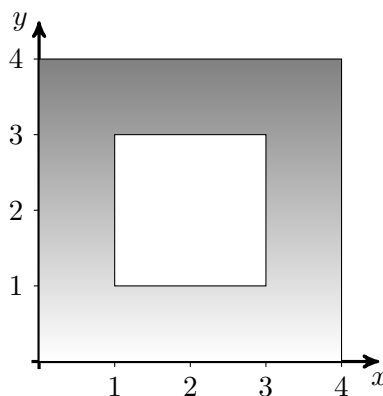
$$\iint_{\mathcal{R}} x^3 y^2 \, dA, \quad (y = x, y = 0, x = 1), \quad \iint_{\mathcal{R}} (2x + 4y + 1) \, dA, \quad (y = x^2, y = x^3),$$

$$\iint_{\mathcal{R}} 2xy \, dA, \quad (y = x^3, y = 8, x = 0), \quad \iint_{\mathcal{R}} \frac{y}{1 + xy} \, dA, \quad (y = 0, y = 1, x = 0, x = 1).$$

15. Evalúa $\iint_{\mathcal{R}} (x + y) \, dA$, en las regiones $\mathcal{R}$ indicadas en la figura:



sol: 40



sol: 48

16. Aplique una integral doble para determinar el área de las regiones $\mathcal{R}$ limitadas por las gráficas de las ecuaciones indicadas:

(a) $y = -x, y = 2x - x^2$; (b) $y = e^x, y = \log x, x = -1, x = 4$; (c) $y = -2x + 3, y = x^3, x = -2$.

17. Mediante una integral doble, calcular el área de la elipse de semiejes a y b .

18. En los siguientes problemas invierta el orden de integración

$$\int_0^2 \int_0^{y^2} f(x, y) \, dx \, dy, \quad \int_0^3 \int_1^{e^x} f(x, y) \, dy \, dx, \quad \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) \, dy \, dx.$$

19. Halle el valor de las siguientes integrales dobles siendo $\mathcal{R}$ la región indicada por la ecuaciones dadas

(b) $\iint_{\mathcal{R}} xy \, dA, \quad \{y = x^2, y = 1\}, \quad (b) \iint_{\mathcal{R}} \sin(y^3) \, dA, \quad \{y = \sqrt{x}, y = 2, x = 0\}.$

20. En los siguientes problemas determinar el volumen del sólido limitado por las gráficas de las ecuaciones indicadas

- a) $2x + y + z = 6, x = 0, y = 0, z = 0$, primer octante,
- b) $x^2 + y^2 = 4, x - y + 2z = 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$,
- c) $z = 1 + x^2 + y^2, 3x + y = 3, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$,
- d) El tetraedro acotado por los planos coordenados y $z = 6 - 2x - 3y$,
- e) El sólido del primer octante limitado por $9x^2 + 4y^2 = 36$ y $3x + 4y - 6z = 0$,
- f) El sólido del primer octante acotado por la superficie del cilindro $y = x^2$ y los planos $x = 0, z = 0, y + z = 1$.

21. Calcular la integral doble en cartesianas y en polares $\iint_D xy \, dx \, dy$, que se extiende al dominio D , limitado por el eje Ox y la semicircunferencia superior $(x-2)^2 + y^2 = 1$.
22. Pasando a coordenadas polares, calcular la siguiente integral doble $\iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy$, que se extiende al recinto limitado por la circunferencia $x^2 + y^2 = 2ax$.
23. En los siguientes problemas, calcula el área de la región $\mathcal{R}$ dada, haciendo primero un dibujo de la región:
 - (a) La región interior a la circunferencia $r = 4 \cos \theta$ y exterior al círculo $r = 2$,
 - (b) $\mathcal{R}$ es un pétalo de la rosa de cuatro hojas $r = 2 \sin 2\theta$.
24. Coordenadas el centro de masas de la lámina que tiene la forma y la densidad indicadas
 a) $\{y = x, x + y = 6, y = 0; \rho = 2y\}$; b) $\{y = x^2, x = 1, y = 0; \rho = x + y\}$.
25. Halla el centro de masas de la región limitada por $y = 1 - x^2$, $y = 0$ y cuya densidad es proporcional a la distancia al eje de abscisas.
26. Encuentra los momentos de inercia I_x, I_y, I_z para la lámina limitada por las curvas dadas y con densidad $\rho(x, y) = x + y$:
 a) $\{y = \sqrt{x}, x = 9, y = 0\}$; b) Cuadrado de vértices $(0, 0), (a, 0), (0, a), (a, a)$.
27. Halla el área de la región $\mathcal{R} = \{x^2 + y^2 \geq 2x, x^2 + y^2 \leq 4x, 0 \leq y \leq x\}$.
28. Calcular el volumen limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 2 + 2x + 2y$.
29. Calcular el volumen del sólido limitado por el cono $2(x^2 + y^2) = z^2$ y el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = -a^2$.