EJERCICIO de matrices por bloques.-

Probar que que la matriz inversa de una matriz triangular superior por bloques A es:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}\,A_{12}\,A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

Aplicarlo a una matriz cualquiera de ese tipo.

RESOLUCIÓN

a) Supongamos que la matriz inversa de la A por bloques es $A^{-1} = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix}$

Por definición de matriz inversa, $A\,A^{-1} = I$, es decir, identificando bloques:

$$\begin{aligned} A_{11}\,X + A_{12}\,Z &= I \\ A_{11}\,Y + A_{12}\,T &= 0 \\ A_{22}\,Z &= 0 \\ A_{22}\,T &= I \end{aligned}$$

Y resolviendo el sistema ordenadamente:

$$T = A_{22}^{-1}, \quad Z = 0, \quad X = A_{11}^{-1}, \quad Y = -A_{11}^{-1}\,A_{12}\,A_{22}^{-1}$$

```
b)  Inversa de una matriz triangular por bloques con MATLAB.
Definamos los bloques de la matriz A con elementos aleatorios entre -20 y +20:

 a11=randint(3,3,20)
     9   -13    -8
    -3   -13     2
    -8     7   -14
 a12=randint(3,2,20)
     8    14
    -5     4
    15     0
 a21=randint(2,3,0)
     0     0     0
     0     0     0
 a22=randint(2,2,20)
    -9     1
    -7     9
 a=[a11,a12;a21,a22]
     9   -13    -8     8    14
    -3   -13     2    -5     4
    -8     7   -14    15     0
     0     0     0    -9     1
     0     0     0    -7     9
                                  Inversa por  bloques según el apartado a)
 am1=[inv(a11),-inv(a11)*a12*inv(a22);a21,inv(a22)]
    0.0514   -0.0729   -0.0398    0.0623   -0.0546
   -0.0178   -0.0582    0.0018   -0.0241    0.0562
   -0.0383    0.0126   -0.0478   -0.1779    0.0737
         0         0         0   -0.1216    0.0135
         0         0         0   -0.0946    0.1216

 inv(a)                    Inversa por elementos, que coincide con am1
    0.0514   -0.0729   -0.0398    0.0623   -0.0546
   -0.0178   -0.0582    0.0018   -0.0241    0.0562
   -0.0383    0.0126   -0.0478   -0.1779    0.0737
         0         0         0   -0.1216    0.0135
         0         0         0   -0.0946    0.1216
```