Matemáticas II - Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales

13 de Septiembre de 2013, 2^a convocatoria

---

1. Se considera el conjunto de matrices ortogonales $\mathcal{O}(3) = \{P \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(3) | P^T P = I = P P^T\}$ sobre $\mathbb{R}^3$

   a) Prueba que $\mathcal{O}(3)$ es un grupo no abeliano con respecto a la multiplicación de matrices. *(0.75 ptos.)*

   b) Prueba que las matrices

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

   pertenecen a $\mathcal{O}(3)$ y halla la inversa de $P\,Q$ y de $Q\,P$ *(0.75 pto.)*

2. Dados los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x - 2y = 0, -x + y + z = 0, x - y - z = 0\}, \\ S_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - z = 0,\ y + z = 0,\ x + y = 0\}. \end{aligned}$$

   a) Encuentra bases de S_1, de S_2 y de $S_1 \bigcap S_2$. *(0.75 ptos.)*

   b) Halla una base de un subespacio S_3 suplementario de $S_1 + S_2$. *(0.5 ptos.)*

   c) Sea el vector $w = (0, -1, -1)$, exprésalo como combinación lineal de $u_1 \in S_1, u_2 \in S_2$ y $u_3 \in S_3$. Razona si esta descomposición es única. *(0.75 ptos.)*

3. Sean $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_3[x]$ y $g : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ las aplicaciones definidas por

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a-b)\,x + (a - b + c - d)\,x^3, \qquad g(a + b\,x + c\,x^2 + d\,x^3) = (a+b) + (b-d)\,x^2$$

   a) Halla las imágenes mediante $h = g \circ f$ de los vectores de la base canónica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. *(0.75 ptos.)*

   b) Calcula una base de la imagen de f y otra del núcleo de g. *(0.75 ptos.)*

   c) Encuentra un vector w de $\mathbb{R}_3[x]$ que no pertenezca ni a Im f ni a Ker g y calcula, si es posible, $g(w)$ y $h^{-1}(g(w))$. *(0.75 ptos.)*

   d) Considera las siguientes bases de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}_2[x]$, respectivamente,

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } \{1, 1+x, 1+x^2\}$$

   Calcula la matriz coordenada de $h = g \circ f$ respecto de este par de bases. *(1 pto.)*

4. Dada la matriz de coeficientes reales

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha+1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \alpha+1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Estudia, en función del valor de α, si existe una matriz Q regular tal que $A = Q\,D_1\,Q^{-1}$, con D_1 matriz diagonal. Encuentra Q en los casos posibles. *(1.25 ptos.)*

b) Considera la matriz $B = 1/2\,(A + A^T)$ con $\alpha = 1$. Encuentra una matriz P regular tal que $P^t\,B\,P = D_2$ con D_2 matriz diagonal. *(1 pto.)*

c) Razona si B puede definir un producto escalar. *(0.5 ptos.)*

d) Calcula el producto $v^T.B.v$, siendo $v = (-3, 1, 2)$. Justifica que este resultado no puede ser $\|v\|$. *(0.5 ptos.)*