Matemáticas II (Ingeniería Tecnologías Industriales)
Grupos 811, 812 y 813

15 de septiembre de 2011 Examen segunda convocatoria

Bloque 1 (75%)

1.- Obtén la curvatura y la torsión de la curva de ecuación paramétrica

$$\mathbf{r}(t) = (2\cos t, t, 2\sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

2.- Dado un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$, de matriz coordenadda respecto de la base canónica

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 3/2 & -3/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3/2 & 3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

a) Prueba que es diagonalizable por semejanza.

b) Encuentra una base respecto de la cual la matriz coordenada de f sea diagonal.

c) Utiliza el hecho de que A es diagonalizable para hallar A^n, $n \in \mathbb{N}$; en particular, A^{10}.

d) Razona porqué la matriz A no es diagonalizable por congruencias.

3.- Considera la aplicación $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1y_1 + 4x_2y_1 + 4x_1y_2 + 9x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 3x_3y_3.$$

a) Comprueba que F es una forma bilineal simétrica.

b) Calcula el rango y la signatura de F.

c) Determina una base de $\mathbb{R}^3$ conjugada respecto de Fde manera que su matriz coordenada sea su forma canónica reducida.

d) Razona si F define o no un producto escalar en $\mathbb{R}^3$.

e) En el caso afirmativo, da una base de $\mathbb{R}^3$ ortonormal respecto de F.

4.- Considera la aplicación $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x]$ dada por:

$$f(p(x)) = p(1) + p(0)\,x$$

a) Prueba que es una aplicación lineal.

b) Halla Imf y Ker$f$.

c) Obtén la ecuación de f, $Y = AX$, respecto de la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathbb{R}_1[x]$, respectivamente.

d) Determina la ecuación coordenada de f, $\widetilde{Y} = B\widetilde{X}$, respecto de la base $B_{\mathbb{R}_2[x]} = \{3, x+2, x-x^2\}$ y $B_{\mathbb{R}_1[x]} = \{3+3x, 3+2x\}$, respectivamente.

e) Halla matrices P y Q tales que $B = P\,A\,Q$.

Bloque 2 (15%)

5.- Sean T y S subespacios vectoriales de $\mathbb{R}_4[x]$ tales que

$$S = \mathbb{R}\{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\} \qquad y \qquad T = \mathbb{R}\{q_1(x),\, q_2(x)\}$$

donde:

$$\begin{array}{ll} p_1(x) = 1 + x^2 + 3\,x^3, & \\ p_2(x) = x + 4\,x^2 + 3\,x^3, & q_1(x) = x + 2\,x^2, \\ p_3(x) = 2 - x - 2\,x^2 + 3\,x^3, & \\ p_4(x) = 1 - x + x^2 - x^3 - x^4, & q_2(x) = x + x^2 + x^3 - x^4 \end{array}$$

Observa los siguientes comandos de Octave y contesta a las cuestiones que se plantean a continuación.

```
A=[1,0,1,3,0;0,1,4,3,0;2,-1,-2,3,0;1,-1,1,-1,-1]'
     1     0     2     1
     0     1    -1    -1
     1     4    -2     1
     3     3     3    -1
     0     0     0    -1

B=[0,1,0,2,0;1,0,1,1,-1]'
     0     1
     1     0
     0     1
     2     1
     0    -1

rref(A)
     1     0     2     0
     0     1    -1     0
     0     0     0     1
     0     0     0     0
     0     0     0     0

rref(B)
     1     0
     0     1
     0     0
     0     0
     0     0

rref([A,B])
     1     0     2     0     0     0
     0     1    -1     0     0     0
     0     0     0     1     0     1
     0     0     0     0     1     1
     0     0     0     0     0     0
```

Cuestión a): Marca con $\boxed{\text{X}}$ los vectores necesarios para formar una base de S. Los que dejes de marcar escríbelos como una combinación lineal de los marcados. Determina la dimensión de S.

☐ $p_1(x)$ ☐ $p_2(x)$ ☐ $p_3(x)$ ☐ $p_4(x)$

dim S =

Cuestión b): Marca con $\boxed{\text{X}}$ los vectores necesarios para formar una base de T. Los que dejes de marcar escríbelos como una combinación lineal de los marcados. Determina la dimensión de T.

$\square\, q_1(x) \qquad \square\, q_2(x)$

dim T =

Cuestión c): Marca con $\boxed{\text{X}}$ los vectores necesarios para formar una base de S + T. Los que dejes de marcar escríbelos como una combinación lineal de los marcados. Determina la dimensión de S + T.

$\square\, p_1(x) \qquad \square\, p_2(x) \qquad \square\, p_3(x) \qquad \square\, p_4(x) \qquad \square\, q_1(x) \qquad \square\, q_2(x)$

dim S =

Cuestión d): Deduce la dimensión de S ∩ T y halla, razonadamente, una base de este subespacio

Bloque 3 (10%)

6.- Considera la aplicación lineal $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de expresión coordenada $Y = AX$, respecto de la base canónica, con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Comprueba que 2 y 3 son valores propios de h y calcula los subespacios fundamentales asociados.
2. Encuentra $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$\begin{aligned} h(v_1) &= 2v_1, \\ h(v_2) &= 3v_2, \\ h(v_3) &= v_2 + 3v_3. \end{aligned}$$

3. Si denotamos por B a la matriz coordenada de h respecto de la base$\{v_1, v_2, v_3\}$, halla una matriz regular P tal que $B = P^{-1}AP$.

Soluciones

1.a.- Hélice destrógira comenzando en (0,2,0)

1.b.-

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = (-2\,\cos t, -2\,\mathrm{sen}\,t, 1), \qquad \|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\| = \|\mathbf{x}'\| = \sqrt{5} = \frac{ds}{dt}$$