Matemáticas II - Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales

24 - Enero - 2013; 1ª Convocatoria

Justifica todos los pasos que realices

1. Sea $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ el conjunto formado por los cuatro movimientos del plano (dos rotaciones y dos reflexiones) que dejan invariante el rectángulo. Teniendo en cuenta que $m_i \circ m_j = m_k$, donde $\circ$ representa la composición de movimientos, completa la tabla

$\circ$	m_1	m_2	m_3	m_4
m_1				
m_2				
m_3				
m_4				

y utilízala como herramienta para demostrar que $(M, \circ)$ es un grupo abeliano. *(1 pto.)*

2. Dados los siguientes subespacios

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - 2y = 0, -x + y + z = 0\}, \\ S_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - 3z = 0, 2y + 3z = 0\}. \end{aligned}$$

   a) Calcula $S_1 \bigcap S_2$. *(0.75 ptos.)*

   b) Halla $S_1 + S_2$. *(0.75 ptos.)*

   c) Razona si $\mathbb{R}^3 = S_1 \bigoplus S_2$. *(0.5 ptos.)*

   d) Sea u un vector no nulo de S_1, v un vector no nulo de S_2 y $w = (1, 1, 1)$, demuestra que la familia $\{u, v, w\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$. *(0.5 ptos.)*

3. Sea $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la aplicación definida por

$$f(a + bx + cx^2 + dx^3) = \begin{pmatrix} 2a + c & b \\ c + d & 2a + b + c \end{pmatrix}.$$

   a) Halla una base del núcleo de f. *(0.75 ptos.)*

   b) Calcula una base de la imagen de f. *(0.75 ptos.)*

   c) Determina un subespacio, T, suplementario de Im f. Dada $B \in T$, razona si existe $p \in \mathbb{R}_3[x]$ tal que $f(p) = B$. *(0.5 ptos.)*

   d) Considera las siguientes bases de $\mathbb{R}_3[x]$ y $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, respectivamente,

$$\{1, 1 + x, 1 + x^2, 1 - 2x^2 + 2x^3\} \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

   Calcula la matriz coordenada de f respecto de este par de bases. *(1 pto.)*

4. Dada la matriz de coeficientes reales

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

a) Comprueba que $2, \alpha$ y $(\alpha - 1)$ son valores propios de la matriz A. *(0.5 ptos.)*

b) Estudia, en función del valor de α, si existe una matriz Q regular tal que $A = QD_1Q^{-1}$ con D_1 matriz diagonal. *(1 pto.)*

c) Con $\alpha = -1$, ¿cuál es la signatura y el rango de A? *(0.5 ptos.)*

d) Con $\alpha = -1$, obtén una matriz P regular tal que $P^tAP = D_2$ con D_2 matriz diagonal. *(1 pto.)*

e) Con $\alpha = -1$, clasifica la forma cuadrática cuya matriz coordenada respecto de la base $\{(1,1,1), (2,-1,0), (0,1,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ es A. *(0.5 ptos.)*

Soluciones

Ejercicio 1.- Tabla de Klein del grupo de movimientos del rectangulo (M,o)

```
ClearAll[s,s1,s2,s3,s4]
s={s1,s2,s3,s4};lista={1,2,3,4};
s[[1]][lista_]:=Permutations[lista][[1]]
s[[2]][lista_]:=Permutations[lista][[17]]
s[[3]][lista_]:=Permutations[lista][[24]]
s[[4]][lista_]:=Permutations[lista][[8]]
Do[Print[s[[j]], = ,s[[j]][lista]],{j,1,Length[s]}]
```

s1 = {1,2,3,4}

s2 = {3,4,1,2}

s3 = {4,3,2,1}

s4 = {2,1,4,3}

```
s[[2]][s[[3]][lista]]
```

{2,1,4,3}

```
sklein = Table[ Do[ If[ s[[i]][s[[j]][lista]] == s[[k]][lista], Return[s[[k]] ] ] ,{k, 1, Length[s]}] ,{i, 1, Length[s]},{j, 1, Length[s]}];
sklein // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} s1 & s2 & s3 & s4 \\ s2 & s1 & s4 & s3 \\ s3 & s4 & s1 & s2 \\ s4 & s3 & s2 & s1 \end{pmatrix}$$

La tabla de Klein es simetrica, ..., luego (M, o) es un grupo abeliano

Ejercicio 2

$S_1 = \{(2,1,1)\}, \qquad S_2 = \{(6,-3,2)\}$

a) $S_1 \cap S_2 = \{v = t\,(2,1,1) = s\,(6,-3,2)\} = \{(0,0,0)\}$

b) $S_1 + S_2 = \{t\,(2,1,1) + s\,(6,-3,2)\} = \mathbb{R}\{(2,1,1),\,(6,-3,2)\}$

c) Al ser la interseccin nula, la suma es directa, pero la dimensin de la suma es menor que la de $\mathbb{R}^3$, por lo que no se cumple.

d) Sean: u = t (2,1,1), v = s (6, -3, 2), w = (1, 1, 1). La familia u, v, w tiene rango 3, como se ve a continuacin:

u= t*{2,1,1};v=s*{6, -3, 2}; w = {1,1,1};

P=Transpose[{u,v,w}];P//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 2t & 6s & 1 \\ t & -3s & 1 \\ t & 2s & 1 \end{pmatrix}$$

RowReduce[P]

{{1,0,0},{0,1,0},{0,0,1}}

Luego, rg P = 3

Ejercicio 3

imf={{2*a+c,b},{c+d,2*a+b+c}};

m0=$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

Solve[Im f==m0,{a,b,c,d}]

$\left\{\left\{a \to \frac{d}{2}, b \to 0, c \to -d\right\}\right\}$

v4 = {1, 0, -2, 2};

Base del Ker f : v4 = {1, 0, -2, 2};

Im f = (2*a + c)* A1 + b*A2 + (c+d)*A3, siendo :

A1={{1,0},{0,1}}; A2={{0,1},{0,1}}; A3 = {{0,0},{1,0}};

Solve[t1*A1+t2*A2+t3*A3 == m0,{t1,t2,t3}]

{{t1$\to 0, t2 \to 0, t3 \to 0$}}

Luego {A1, A2, A3} son base de Im f

Join[{Flatten[A1]},{Flatten[A2]},{Flatten[A3]},{{0,0,0,1}}]//Transpose//RowReduce

{{1,0,0,0},{0,1,0,0},{0,0,1,0},{0,0,0,1}}

suplimf = < (0, 0, 0, 1) >

B del suplimf, no pertenece a Im F, luego no existe ningún vector cuya imagen sea B

P={{1,0,0,0},{1,1,0,0},{1,0,1,0},{1,0,-2,2}};

Q={{2,0,0,2},{2,1,0,3},{3,0,1,3},{0,0,0,1}};

B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

A = P$^-1.B.Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4

A={{q,q,1},{-1,1,-1},{1,-1,q}};A//TableForm

q	q	1
-1	1	-1
1	-1	q

Eigenvalues[A]

{2,-1+q,q}

id3=IdentityMatrix[3];pcA=Det[A-t*id3]

-2 q+2 $q^2 + 2t - 3qt - q^2t + t^2 + 2qt^2 - t^3$

Factor[pcA]

-(-1+q-t) (q-t) (-2+t)

RowReduce[A-2*id3]

RowReduce[A-q*id3]

RowReduce[A-(q-1)*id3]

$\left\{\left\{1, 0, \frac{1}{2}(-1+q)\right\}, \left\{0, 1, \frac{3-q}{2}\right\}, \{0, 0, 0\}\right\}$

$\left\{\left\{1, 0, \frac{1}{q}\right\}, \left\{0, 1, \frac{1}{q}\right\}, \{0, 0, 0\}\right\}$

{{1,0,1},{0,1,0},{0,0,0}}

n2=3-MatrixRank[A-2*id3]/.q→ 3

n2=3-MatrixRank[A-q*id3]/.q→ 2

1

1

Si q = 2, 3 == > no diagonalizable y no existe P Si q != 2 y 3 == > diagonalizable y existe P

A1 = A/.q→ -1; $A1//MatrixForm$

-1	-1	1
-1	1	-1
1	-1	-1

ai=Transpose[Join[A1,id3]];ai//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i=2;j=1; m = ai[[i,j]]/ai[[j,j]]; ai[[i]]=ai[[i]]-m*ai[[j]]

{0,2,-2,-1,1,0}

i=3;j=1; m = ai[[i,j]]/ai[[j,j]]; ai[[i]]=ai[[i]]-m*ai[[j]]

{0,-2,0,1,0,1}

ai//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i=3;j=2; m = ai[[i,j]]/ai[[j,j]]; ai[[i]]=ai[[i]]-m*ai[[j]]

{0,0,-2,0,1,1}

ai[[1,2]]=ai[[1,3]]=ai[[2,3]]=0;ai//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

P= Transpose[Take[ai,{1,3},{4,6}]]; P//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D2=Transpose[P].A.P/.q$\rightarrow -1$

{{-1,0,0},{0,2,0},{0,0,-2}}

rg A = 3, sg A = 1 == > indefinida