Matemáticas II – Ingeniería de Tecnologías Industriales

4 de febrero de 2012 – 1^a Convocatoria – Prueba escrita

Examen Tipo A

1. En el espacio vectorial $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ consideramos los conjuntos

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / \, 2a = b \right\}, \qquad T = \mathbb{R}\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

   (a) Prueba que S es subespacio vectorial de V.
   (b) Halla una base de S.
   (c) Estudia si se cumple que $V = S \oplus T$.
   (d) Comprueba que la familia $\mathcal{B} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ es base de V con

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (e) Calcula las coordenadas (respecto de la base $\mathcal{B}$) de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Considera la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -t \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -t & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

   (a) Discute la existencia y/o unicidad de solución del sistema $AX = 0$ según los valores del parámetro t.

   Nota: Para los siguientes apartados de este ejercicio considera el caso particular $t = 1$.

   (b) Supón que la matriz A anterior es la matriz coordenada (respecto de las bases canónicas) de una aplicación lineal $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x]$. Determina bases de Kerf y de Imf.
   (c) Calcula bases de $\mathbb{R}_3[x]$ y $\mathbb{R}_2[x]$ (respectivamente) respecto de las cuales la matriz coordenada de f, sea la más sencilla posible.
   (d) Si denotamos por B a la matriz hallada en el apartado anterior, prueba que existen matrices regulares P y Q tales que $B = PAQ$.

3. Considera el endomorfismo $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de ecuación coordenada respecto de la base canónica $Y = AX$ con

$$A = \begin{bmatrix} -3/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & -3/2 \end{bmatrix}$$

   (a) Encuentra una base respecto de la cual la matriz coordenada de h sea diagonal.
   (b) Utiliza el hecho de que A es diagonalizable para hallar A^n con $n \in \mathbb{N}$; en particular, A^{10}.
   (c) Prueba que no es posible hallar una raíz cuadrada de A cuyos elementos sean números reales.

4. Dada la forma bilineal simétrica $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida mediante

$$F((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + \alpha\, x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2.$$

   (a) Halla la expresión coordenada de $F(u, v) = X^t AY$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
   (b) En función del parámetro α, calcula el rango y la signatura de F.
   (c) ¿Para qué valores de α se tiene que F define un producto escalar en $\mathbb{R}^3$?
   (d) Para el caso particular de $\alpha = 1$, realiza dos iteraciones del método de Jacobi aplicado al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = (1, 2, 2)^t$ y tomando $\mathbf{x}^0 = (0, 0, 0)^t$.

Matemáticas II – Ingeniería de Tecnologías Industriales

4 de febrero de 2012 – 1^a Convocatoria – Prueba de prácticas

---

Alumno: ....

Se han realizado los siguientes cálculos en Octave sobre una $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ simétrica la cual no necesitas conocer explícitamente y no debes calcular.

```
>> A1=pijt(2,1,-2/5,3)*A*pijt(1,2,-2/5,3);
>> A2=pijt(3,2,-5/13,3)*A1*pijt(2,3,-5/13,3)
A2 =
      5           0           0
      0          26/5         0
      0           0          81/13
>> rref(3*eye(3)-A)
ans =
          1         -0          -2
         -0          1           2
         -0         -0          -0
>> rref(6*eye(3)-A)
ans =
          1         -0           1
         -0          1          1/2
         -0         -0          -0
>> rref(9*eye(3)-A)
ans =
          1         -0         -1/2
         -0          1          -1
         -0         -0          -0
```

Teniendo en cuenta estos resultados contesta de forma **RAZONADA** a las siguientes preguntas:

1. ¿Existe una matriz triangular inferior ℓ con $\ell_{ii} > 0$ tal que $A = \ell\ell^t$? En caso afirmativo, expresa esta matriz ℓ como producto de matrices elementales.

2. Discute la existencia y/o unicidad de solución del sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (con $\mathbf{b}$ cualquiera). Razona si la matriz A admite factorización LU e indica cómo se utiliza esta factorización para resolver el sistema anterior.

3. ¿Cuál es el polinomio característico de A? Justifica la existencia de una matriz regular R tal que $D = R^{-1}AR$ con D matriz diagonal. Halla R.

4. Elige λ uno de los valores propios de A. Determina las ecuaciones paramétricas de $V(\lambda)$ (el subespacio fundamental asociado a λ) y construye un subespacio suplementario suyo.