Matemáticas II - Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales

22 - Enero - 2015 1^a Convocatoria

Justifica todos los pasos que realices

---

1. Considera $v_1 = (1, -1, 1)$, $v_2 = (2, 1, -2)$ y $v_3 = (1, 1, 1)$ tres vectores de $\mathbb{R}^3$.

   a) Si $F = \mathbb{R} < v_2, v_3 >$, estudia si $v_1 \in F$. ¿Es $\{v_1, v_2, v_3\}$ una familia libre?

   (*0.7 puntos*)

   b) Prueba que $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Encuentra una base de E. *(1 punto)*

   c) Demuestra si E y F son o no suplementarios. (*0.8 puntos*)

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ una aplicación lineal dada por

$$f(1,0,0) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},\ f(0,1,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix},\ f(0,0,1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

   a) Escribe la imagen del vector $(1, 2, 3)$ mediante esta aplicación.(*0.5 puntos*)

   b) Calcula la matriz coordenada de f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y la base de $M_2(\mathbb{R})$: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. (*1 punto*)

   c) Halla una base de Ker$f$. (*0.5 puntos*)

   d) Razona si existen $\{u_i\}_{i=1}^3$ base de $\mathbb{R}^3$ y $\{M_j\}_{j=1}^4$ base de $M_2(\mathbb{R})$, de modo que, la matriz coordenada de f respecto de dichas bases sea

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (*1 punto*)

3. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Teniendo en cuenta que A es la matriz coordenada de $h \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$, justifica, sin hacer ningún cálculo previo, que A es diagonalizable para cualquier valor de $\alpha \in \mathbb{R}$. (*0.4 puntos*)

b) Halla los valores propios y los subespacios fundamentales de A. (*0.8 puntos*)

c) Estudia el rango y la signatura de A. (*0.6 puntos*)

d) Para $\alpha = 1$, obtén una matriz P regular tal que $P^{-1}\,A\,P$ sea diagonal. (*0.6 puntos*)

e) Para $\alpha = 1$, calcula una matriz Q ortogonal tal que $Q^t\,A\,Q$ sea diagonal. (*0.6 puntos*)

4. Dada la ecuación de la curva $\gamma(t) = (t, 2\sin t, -\cos t)$, encuentra la ecuación de su plano rectificante en el punto $(\pi/2, 2, 0)$. (*1.5 puntos*)

Ej. 1.a

```
v1 = {1, -1, 1}; v2 = {2, 1, -2}; v3 = {1, 1, 1};
M = {v2, v3, v1} // Transpose; {M // MatrixForm, MatrixRank[M]}
```

$$\left\{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, 3\right\}$$

rg{v1,v2,v3} = 3 ==> v1 no es comb. , lin. de los otros. Es familia libre

```
MF = {v2, v3} // Transpose   (* columnas son base de F *)
```

```
{{2, 1}, {1, 1}, {-2, 1}}
```

Ej. 1.b

Si v y vv son de E,

```
v = {x, -x, z}; vb = {xb, -xb, zb};
tvsvb = t * v + s * vb
```

```
{t x + s xb, -t x - s xb, t z + s zb}
```

```
tvsvb[[1]] == - tvsvb[[2]]
```

```
True
```

Luego t*v + s*vb pertenece a E, es decir, E es s. v. de R^3

```
v == x * {1, -1, 0} + z * {0, 0, 1}
```

```
True
```

luego una base de E es ...

```
w1 = {1, -1, 0}; w2 = {0, 0, 1}; ME = {w1, w2} // Transpose;
{ME // MatrixForm, MatrixRank[ME]}
```

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 2\right\}$$

Ej. 1.c

Un sistema generador de E + F es

```
FmE = Join[MF // Transpose, ME // Transpose] // Transpose; FmE // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
RowReduce[FmE] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

luego, dim (E+F) = 3 < dim E + dim F ==> dim (EiF) = 1 <>0, luego no son suplementarios

Ej. 2.a.-

```
fe1 = {{3, 1}, {2, 4}}; fe2 = {{1, -1}, {-5, 5}}; fe3 = {{2, -2}, {-1, 4}};
```

```
v = {1, 2, 3}; fv = fe1 + 2 * fe2 + 3 * fe3; fv // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 11 & -7 \\ -11 & 26 \end{pmatrix}$$

Ej. 2.b.-

En bases canonicas : Y = A X

```
A = {fe1 // Flatten, fe2 // Flatten, fe3 // Flatten} // Transpose; A // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -5 & -1 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

La matriz Q Y las ecs. del cambio de b. can. a base nueva : Y = Q Y_v , siendo

```
Q = {{1, -1, 0, 0}, {1, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, -1}, {0, 0, 1, 1}} // Transpose;
Q // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
B  = Inverse[Q].A; B // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & -\frac{5}{2} \\ 3 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Ej. 2.c -

```
MatrixForm[a = Transpose[Join[Transpose[A], IdentityMatrix[Length[A]]]]]
```

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
MatrixForm[r = RowReduce[a]]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{21} & \frac{2}{21} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{4}{21} & -\frac{4}{21} & \frac{1}{21} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{10}{21} & \frac{1}{7} & \frac{1}{21} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{21} & -\frac{8}{21} & -\frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

```
NullSpace[A]
```

{}

```
MatrixRank[A]
```

```
3
```

Como rg f = 3 == > dim Ker f = dim R^3 - rg f = 0. Luego no hay base de Ker f = {0}

Ej. 2.d.-

A y B deberían se equivalentes, es decir, rg A = rg B. Como rg f = 3 == rg A <> rg B = 2, NO existe ningún par de bases para los que se cumpla el enunciado.

Ej. 3.a.-

Como es simétrica es diagonalizable por congruencia.
También, como los valores propios son 1, 2 + \alpha, 2 - \alpha mJ = 1 = nJ . Por lo tanto, es diagonalizable por semejanza.

Ej. 3.b.-

```
A = {{1, 0, 0}, {0, 2, q}, {0, q, 2}};
```

```
Eigensystem[A]
```

```
{{1, 2 - q, 2 + q}, {{1, 0, 0}, {0, -1, 1}, {0, 1, 1}}}
```

```
A1 = A /. q → 1; Eigensystem[A1]
Am1 = A /. q → -1; Eigensystem[Am1]
A0 = A /. q → 0; Eigensystem[A0]
```

```
{{3, 1, 1}, {{0, 1, 1}, {0, -1, 1}, {1, 0, 0}}}
```

```
{{3, 1, 1}, {{0, -1, 1}, {0, 1, 1}, {1, 0, 0}}}
```

```
{{2, 2, 1}, {{0, 0, 1}, {0, 1, 0}, {1, 0, 0}}}
```

Ej. 3.c.-

```
MatrixForm[mD = Transpose[Join[Transpose[A], IdentityMatrix[Length[A]]]]]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & q & 0 & 1 & 0 \\ 0 & q & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
i = 3; j = 2; mD[[i]] = mD[[i]] - q / 2 * mD[[j]]; mD[[j, i]] = 0; mD // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \frac{q^2}{2} & 0 & -\frac{q}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

rg A = 3, sg A = 2, si q^2 > 4; indefinida
rg A = 2, sg A = 2, si q^2 = 4; semidefinida positiva
rg A = 3 = sg A, si q^2 < 4; definida positiva

Ej. 3.d.-

```
A1 = A /. q → 1; vvp = Eigensystem[A1]
```

```
{{3, 1, 1}, {{0, 1, 1}, {0, -1, 1}, {1, 0, 0}}}
```

```
P = vvp[[2]] // Transpose; P // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
Inverse[P].A1.P  (*   semjante a D    *)
```

{{3, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}

Ej. 3.e.-

```
Pt = P // Transpose; Q = Table[Pt[[j]] / Norm[Pt[[j]]], {j, 1, 3}] // Transpose;
{P // MatrixForm, Q // MatrixForm}
```

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

```
Transpose[Q].A1.Q // Simplify (*  congruente con   D   *)
```

{{3, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}

Ej. 4.-

In[3]:= `ClearAll[r, t];`

In[4]:= `r[t_] := {t, 2 * Sin [t], -Cos[t]};`

In[5]:= `ParametricPlot3D[r[t], {t, 0, 2 * Pi}]`

In[6]:= `r'[t]`

Out[6]= {1, 2 Cos[t], Sin[t]}

In[7]:= `mrp = Sqrt[Dot[r'[t], r'[t]]] // FullSimplify;  vt[t_] = r'[t] / mrp`

Out[7]= $\left\{\frac{1}{\sqrt{1+4\,\mathrm{Cos}[t]^2+\mathrm{Sin}[t]^2}}, \frac{2\,\mathrm{Cos}[t]}{\sqrt{1+4\,\mathrm{Cos}[t]^2+\mathrm{Sin}[t]^2}}, \frac{\mathrm{Sin}[t]}{\sqrt{1+4\,\mathrm{Cos}[t]^2+\mathrm{Sin}[t]^2}}\right\}$

In[8]:= `vn[t_] = vt'[t] / mrp // FullSimplify`

Out[8]= $\left\{\frac{6\,\mathrm{Sin}[2\,t]}{(7+3\,\mathrm{Cos}[2\,t])^2}, -\frac{16\,\mathrm{Sin}[t]}{(7+3\,\mathrm{Cos}[2\,t])^2}, \frac{20\,\mathrm{Cos}[t]}{(7+3\,\mathrm{Cos}[2\,t])^2}\right\}$

In[9]:= `{r[Pi / 2], vn[Pi / 2]}`

Out[9]= $\left\{\left\{\frac{\pi}{2}, 2, 0\right\}, \{0, -1, 0\}\right\}$

In[10]:= `plrctf = Dot[{x, y, z} - r[Pi / 2], vn[Pi / 2]]`

Out[10]= 2 - y