9 Normas y métodos iterativos lineales

Ejercicio 9.1 Encontrar norma 1, espectral y de Chebyshev de las matrices siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 9.2 Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1+\epsilon \end{bmatrix}.$$

1) Probar que el número de condición de la matriz A respecto de la norma euclídea es del orden de ϵ^{-1}

2) Probar que el número de condición de la matriz A respecto de cualquier norma es del orden de ϵ^{-1}

Ejercicio 9.3 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1.00001 & 2 & 3.00001 \end{bmatrix}$$

la matriz ampliada de un sistema que tiene como solución x = (1, 1). Utilizando aritmética de 7 dígitos, encontrar la solución del sistema perturbado definido por la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3.00001 \\ 1.000011 & 2 & 3.00003 \end{bmatrix}.$$

¿Está bien condicionada la matriz de coeficientes?. Hallar una cota del error relativo.

Ejercicio 9.4 La matriz de Hilbert n x n $H^{(n)}$ definida por

$$H_{ij}^{(n)} = \frac{1}{i+j-1}, \; 1 \leq i, j \leq n$$

está mal condicionada y aparece en la resolución de las ecuaciones normales del problema polinomial de mínimos cuadrados.

a) Probar que

$$[H^{(4)}]^{-1} = \begin{bmatrix} 16 & -120 & 240 & -140 \\ -120 & 1200 & -2700 & 1680 \\ 240 & -2700 & 6480 & -4200 \\ -140 & 1680 & -4200 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Resolver el sistema lineal $H^{(4)}x = b$, siendo b = (1, 0, 0, 1) con aritmética de 3 dígitos y encontrar una cota del error relativo.

Ejercicio 9.5 Estudiar el condicionamiento del sistema, la convergencia y el número de iteraciones necesarias en su caso de los métodos usuales aplicados a la resolución de los sistemas lineales definidos por su matriz ampliada siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -7 & -6 \\ 1 & 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & .4 & .3 & .2 \\ .8 & 1 & .1 & 1.2 \\ .5 & .5 & 1 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Tolerancia pedida, Tol = 10^{-3}

Ejercicio 9.6 Estudiar el condicionamiento del sistema, la convergencia y el número de iteraciones necesarias en su caso de los métodos usuales aplicados a la resolución de los sistemas lineales definidos por su matriz ampliada siguiente:

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2.1 & 0 \\ 7.2 & 0 & 2 & 7.2 \\ -2.2 & 4 & 1 & 1.8 \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} 1 & .363 & .273 & .18182 \\ .75 & 1 & .125 & 1.25 \\ .5 & .5 & 1 & .25 \end{bmatrix}$$

Tolerancia pedida, Tol $= 10^{-3}$

Ejercicio 9.7 Se considera el sistema lineal definido por su matriz ampliada siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 4 & 0 & 15 \\ 1 & 10 & 5 & -1 & 15 \\ 4 & 5 & 10 & 7 & 26 \\ 0 & -1 & 7 & 9 & 15 \end{bmatrix},$$

que tiene por solución x = (1, 1, 1, 1)

a) Comprobar que la solución del sistema perturbado con $\Delta b = (1,1,1,1)$ es $x + \Delta x = (832, 1324, -2407, 2021)$

b) Explicar el resultado anterior utilizando una desigualdad adecuada.

Ejercicio 9.8 Estudiar la convergencia y el número de iteraciones necesarias en su caso de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel aplicados a la resolución del sistema lineal definido por su matriz de coeficientes siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

Tolerancia pedida, Tol $= 10^{-2}$