8 Espacios euclídeos (o con producto escalar)

Ejercicio 8.1 En el espacio $\mathbb{R}^3$ consideramos la aplicación $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$F((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 6x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_3y_3$$

i) Comprobar que $\mathbb{R}^3$ con F es un espacio euclídeo.
ii) ¿Cuál es la matriz de este producto escalar respecto de la base canónica?

Ejercicio 8.2 Consideramos el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar estándar:

$$x \cdot y = x_1\, y_1 + \ldots + x_n\, y_n$$

siendo $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$. Obtener, para n = 3, una base ortonormal a partir de $\{(1, 0, -1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$.

Ejercicio 8.3 Obtener una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$ (con el producto escalar estándar) cuyos primeros vectores sean $a_1 = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$ y $a_2 = (1/6, 1/6, 3/6, -5/6)$ y tal que a_3 tenga su primera componente nula.

Ejercicio 8.4 En $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar que respecto a una base $\{a_1, a_2, a_3\}$ tiene como matriz coordenada:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Comprobar que, efectivamente, se trata de un producto escalar.
b) Hallar el complemento ortogonal del subespacio engendrado por los vectores $a_1 + a_2$ y $a_1 - a_2$.
c) Obtener una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ con respecto a ese producto escalar.

Ejercicio 8.5 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Considerar $A^1, A^2, A^3 \in \mathbb{R}^4$ y aplicar el método de Gram-Schmidt para obtener un sistema ortonormal.
b) Encontrar A = Q R con Q $\in M_3(\mathbb{R})$ talque Q'Q = I, $R \in M_3(\mathbb{R})$ triangular superior.

Ejercicio 8.6 Hallar la factorización Q R de las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y utilizarla para resolver el sistema correspondiente.

Ejercicio 8.7 Consideramos $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar estándar y

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\, | x + y + z = 0\}.$$

Hallar el vector de S más próximo al vector (1, -1, 3).

Ejercicio 8.8 La relación entre los grados Farenheit F y Celsius C es de la forma F = a + b C, para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$. A causa de unas medidas no exactas, la tabla siguiente no refleja perfectamente esta relación. Hallar valores aproximados de a y b a partir de los siguientes datos:

C	-1	2	10	15
F	32	36	51	57

Hallar la ecuación que mejor ajuste estos datos.

Ejercicio 8.9 Ajustar mediante una parábola $y = a + b\,t + c\,t^2$ las medidas siguientes:
y = 2 en t = -1; y = 0 en t = 0; y = -3 en t = 1; y = -5 en t = 2.

Ejercicio 8.10 Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

obtener la descomposición A = Q R y resolver el sistema A X = b, donde b = (0, 1, - 1)^T , por mínimos cuadrados.

Ejercicio 8.11 Sea G la forma bilineal simétrica sobre $\mathbb{R}^3$ (con el producto escalar habitual), que tiene por matriz coordenada respecto de la base canónica:

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ respecto de la cual la matriz coordenada de G sea diagonal.

Ejercicio 8.12 Sea la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Se pide:

i) Hallar una matriz P ortogonal tal que P A P' sea diagonal.
ii) Hallar una matriz Q regular tal que Q A Q' sea I
iii) Rango y signatura de A.

Ejercicio 8.13 Calcular todos los valores y vectores propios mediante factorización Q R de las matrices

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix},$$