7 Formas bilineales y cuadráticas

Ejercicio 7.1 .– Sea V el espacio vectorial de las funciones reales continuas definidas sobre el intervalo $[0,1]$. Si $f,\ g \in V$, definimos:

$$F(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Mediante las propiedades de la integral, comprobar que F es una forma bilineal sobre V.

Ejercicio 7.2 .– Sea $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma bilineal simétrica tal que

$$f(e_1, 2e_2) = 2 = f(e_1, e_3), \quad f(3e_2, 2e_3) = -6, \quad f(e_1, e_1) = f(e_3, e_3) = 0, \quad f(e_2, e_2) = -1,$$

siendo $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

a) Hallar la expresión coordenada de f respecto de dicha base.

b) Si $\{u_1, u_2, u_3\}$ es otra base de $\mathbb{R}^3$ dada por $u_1 = e_1 + e_2$, $u_2 = e_1 + e_3$ y $u_3 = e_2 + e_3$, hallar la nueva expresión de f respecto de $\{u_1, u_2, u_3\}$.

Ejercicio 7.3 .– Para la forma bilineal f en $\mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x,y) = x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + x_3\, y_3 + x_1\, y_3$$

describir su forma cuadrática asociada y la forma polar de ésta.

Ejercicio 7.4 .– Sea $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1 y_1 - 2x_1 y_2.$$

a) Probar que f es bilineal, pero no es simétrica.

b) Sea $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = f((x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3)).$$

Encontrar, si existe, la expresión de una forma bilineal simétrica, g, sobre $\mathbb{R}^3$ tal que $Q = Q_g$.

Ejercicio 7.5 .– Se considera la forma cuadrática sobre $\mathbb{R}^2$:

$$q(u) = 2x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2,$$

con (x_1, x_2) las coordenadas de u en una base $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$. Calcula la expresión matricial de q:
(a) en la base $\{e_1, e_2\}$,
(b) en la base $\{v_1, v_2\}$, donde $v_1 = (1, -1)$, $v_2 = (1, 2)$ en la primera base.

Ejercicio 7.6 .– Utilizando matrices diagonales, da ejemplos de los siguientes hechos:
a) A y B indefinidas, pero $A + B$ definida,
b) A y B semidefinas positivas, ninguna definida, pero $A + B$ definida,
c) A y B semidefinas positivas, ninguna definida y $A + B$ semidefinida.

Ejercicio 7.7 .– Considera las siguientes formas cuadráticas en $\mathbb{R}^3$:

$$q_1(v) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 6xy + 4xz, \qquad q_2(v) = 2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz,$$

$$q_3(v) = 9x^2 - 3y^2 + 6xy + 18xz + 12yz, \qquad q_4(v) = xy + 2xz.$$

Escríbelas en forma matricial, encuentra bases conjugadas para cada una de las cuatro matrices obtenidas y clasifica las formas cuadráticas correspondientes.

Ejercicio 7.8 .– Clasifica las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Encuentra bases conjugadas respecto a todas ellas.

Ejercicio 7.9 .– Dada la forma cuadrática $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$q(u) = \alpha x^2 + \alpha y^2 + (\alpha - 1)z^2 + 2xy,$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Hallar el rango y la signatura de q para los distintos valores de α. Clasifica, en función de dichos valores, la forma cuadrática.

Ejercicio 7.10 .– Dada la forma bilineal $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1\, y_1 + x_1\, y_2 + x_1\, y_3 + x_2\, y_1 + x_2\, y_2 - x_3\, y_1 + 2\, x_3\, y_3,$$

hallar su forma cuadrática asociada Q, su forma polar F, la matriz asociada y la signatura de Q.

Ejercicio 7.11 .– Estudiar si son definidas, semidefinidas o indefinidas las siguientes formas cuadráticas sobre $\mathbb{R}^3$:
a) $Q(x, y, z) = x^2 - z^2 - 2\,x\,y + x\,z$
b) $Q(x, y, z) = 2\,x^2 + y^2 + 5\,z^2 - 2\,x\,y - 2\,y\,z + 6\,z\,x$
c) $Q(x, y, z) = -x^2 - 2\,y^2 - z^2 + 2\,x\,y + 2\,y\,z$

Ejercicio 7.12 .– Dadas las matrices A y B, ¿pueden representar a la misma formacuadrática en distintas bases?. Razónalo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 7.13 .– Estudiar el punto crítico P1 = (2,1) del campo escalar

$$f(x, y) = (-x + 2\,y)^2\,(x - y)^2$$

Ejercicio 7.14 .– Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Comprobar que A es definida positiva y hallar su factorización de Cholesky.

b) Utilizar la factorización anterior para resolver el sistema $AX = b$, donde $b^\top = (2, 1, 0)$.