6 Forma canónica de matrices

Ejercicio 6.1 Sea una matriz A cuyo polinomio característico es

$$p(x) = (x-1)(x-3)(x+2)(x^2+1)$$

¿Cuánto valen el determinante y la traza de la matriz A?

Ejercicio 6.2 Probar que las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

no son semejantes, si bien tiene los mismos valores propios.

Ejercicio 6.3 Considera la siguiente matriz 3×3

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en función de dos parámetros $a, b \in \mathbb{R}$. ¿Cuál es su polinomio característico?. ¿Cuáles son sus valores propios (reales y complejos)?. ¿Para qué valores de a y b la matriz es diagonalizable?

Ejercicio 6.4 Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2-\alpha \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Cuáles son los valores propios de A?. ¿Hay algún valor de α para el cual la matriz es diagonalizable?

Ejercicio 6.5 Sabemos que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & p \\ b & 2 & q \\ c & -1 & r \end{pmatrix}$$

admite como vectores propios $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (-1,0,2)$, $v_3 = (0,1,-1)$. Hallar todos los elementos de A, así como los valores propios y sus multiplicidades.

Ejercicio 6.6 Calcular la forma diagonal, caso de que exista, de las siguientes matrices, así como la matriz del cambio a una base de vectores propios:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6.7 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

se pide:
a) Calcular su polinomio característico.
b) Atendiendo a sus valores propios, estudiar si es invertible.
c) Estudiar si es diagonalizable.
d) Caso de ser diagonalizable, dar la matriz de paso a la forma diagonal.

Ejercicio 6.8 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

se pide:
a) Diagonalizarla y determinar una matriz de paso a la forma diagonal.
b) Diagonalizar A^2 y A^{-1}
c) Encontrar una expresión en función de n de A^n y de $(A^{-1})^n$

Ejercicio 6.9 Dada la matriz A del ejercicio 6.5, encontrar la raíz cuadrada de A.

Ejercicio 6.10 Resolver el problema de valores iniciales de ecuaciones diferenciales lineales

$$X' = A\,X, \quad X_0 = (1,1,1),$$

siendo A la matriz del ejercicio 6.5.

Ejercicio 6.11 Aplicar el método de la potencia para encontrar el valor propio dominante de la matriz B del ejercicio 6.6.