# 5 Aplicaciones lineales

**Ejercicio 5.1** Probar que $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ dada por $f(x+iy)=x-iy$ es una aplicación lineal considerando a $\mathbb{C}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, pero no lo es si se considera a $\mathbb{C}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.

**Ejercicio 5.2** Determinar un endomorfismo f de $\mathbb{R}^2$ de forma que:

$$\operatorname{Ker} f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|x+2y=0\}$$

y $f((1,1))=(1,1)$. Dar una expresión general de $f(x,y)$.

**Ejercicio 5.3** Sea $f:\mathbb{R}_2[x]\longrightarrow\mathbb{R}_2[x]$ la aplicación lineal dada por:

$$f(p(x))=p(1)+xp(0)+x^2p(1).$$

Hallar el núcleo y la imagen de f.

**Ejercicio 5.4** Obtener un endomofismo f de $\mathbb{R}^3$ tal que:

$$f(1,0,0)\in\mathbb{R}<(0,0,1)>,\quad f^2=f,\quad Ker f=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|x+z=0\}$$

¿Es f único?.

**Ejercicio 5.5** Sea $f:\mathbb{R}_3[x]\longrightarrow\mathbb{R}$ dado por $f(p(x))=p(0)$.

a) Probar que f es lineal.

b) Hallar bases de Ker f e Im f.

c) Dado $S=\mathbb{R}<x-1>$, estudiar si Ker f y S son suplementarios respecto a $\mathbb{R}_3[x]$.

**Ejercicio 5.6** Sea $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$ una aplicación dada por:

$$f(x_1,x_2,x_3)=(2x_1+x_3,-3x_2+2x_3)$$

a) Comprobar que f es un homomorfismo y hallar su ecuación $Y=AX$ respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}_3$ y $\mathbb{R}_2$

b) Hallar Im f y Ker f.

c) Si en $\mathbb{R}_3$ tomamos la base $\{(2,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$ y en $\mathbb{R}_2$ la base $\{(3,1),(1,4)\}$, hallar su ecuación respecto de estas bases.

**Ejercicio 5.7** Sea $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^4$ el homomorfismo definido por: $f(1,0,0)=(1,0,1,1)$, $f(0,1,0)=(0,1,1,1)$, $f(0,0,1)=(1,-1,0,a)$, siendo $a\in\mathbb{R}$ fijo.

a) Hallar la ecuación matricial de f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$.

b) Hallar a para que f no sea inyectiva.

**Ejercicio 5.8** Sea $f:\mathbb{R}_2[x]\longrightarrow\mathbb{R}_3[x]$ dada por:

$$f(p(x))=\int_0^x p(t)\,dt+p'(x)$$

a) Hallar la matriz coordenada A de f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathbb{R}_3[x]$.

b) Matriz coordenada B de f respecto de las bases $\{1, 2x, 3x^2\}$ y $\{1, x+1, x^2+2, x^3+3\}$

c) Hallar dos matrices regulares P y Q tale s que B = P A Q.

**Ejercicio 5.9** Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$f(2,1,0) = (1,-1,2), \quad f(0,1,2) = (0,2,1), \quad f(1,0,1) = (1,1,3)$$

Se pide:

a) Bases de Im f y Ker f.

b) Matriz coordenada A de f respecto de la base $\{(2,1,0),(0,1,2),(1,0,1)\}$.

c) Matriz coordenada B de f respecto de la base canónica.

d) Hallar una matriz P tal que $A = PBP^{-1}$.

CUESTIONES

**Ejercicio 5.10** Dados V, W espacios vectoriales sobre K de dimensiones n y m respectivamente, y $f \in Hom(V,W)$, probar: i) rg f = n ⇔ f inyectiva. ii) rg f = m ⇔ f suprayectiva.

**Ejercicio 5.11** Sea V un espacio vectorial sobre K y $f \in End(V)$. Probar que son equivalentes: i) Im $f\cap$ Ker f = 0. ii) f ( f ( v ) ) = $0_V \Rightarrow$ f( v ) = $0_V$ .

**Ejercicio 5.12** Sea V un espacio vectorial sobre K y $f \in End(V)$ tal que $f^2 = f$. Probar que Im f y Ker f son subespacios suplementarios.

**Ejercicio 5.13** Sea V un espacio vectorial y $\{v_1, ..., v_n\}$ una base del mismo. Se define el endomorfismo h de V mediante:

$$h(v_1) = v_2, h(v_2) = v_3, h(v_{n-1}) = v_n, h(v_n) = 0_V$$

a) Hallar la matriz coordenada de h respecto de la base dada.

b) Comprobar que $h^n = 0$ pero $h^{n-1} \neq 0$.

**Ejercicio 5.14** Razonar la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones

a. Sea $f \in Hom(V,W)$ y $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ una base de V. Entonces,

$$\{f(a_1), f(a_2), ..., f(a_n)\} \text{ base de } f(V) \Rightarrow Kerf = 0_V$$

b. Sea $f \in End(V)$ y $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ una base de V, entonces,

$$f(a_i) \neq 0_v, i = 1, 2, ..., n \Rightarrow Imf = V$$

c. $f, g \in End(V) \Rightarrow Im(f+g) = Imf + Img$.