4 Espacios vectoriales

Espacio vectorial. Subespacios vectoriales.

Ejercicio 4.1 a) Pruebe que el conjunto $\mathrm{E} = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ es un espacio vectorial con respecto a la suma y al producto por escalares.
b) Averiagüe cuáles de los siguientes son subespacios vectoriales: i) $F = \{f \in E | f(x^2) = (f(x))^2\}$, ii) $G = \{f \in E | f(0) = f(2)\}$, iii) $H = \{f \in E | f(2) = 3 + f(-1)\}$

Ejercicio 4.2 .– ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^4$ son subespacios vectoriales?.

$$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 \in \mathbb{Z}\}$$
$$B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 = 0 \vee x_2 = 0\}$$
$$C = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 + 2x_4 = 7\}$$

Ejercicio 4.3 .– Determine si los siguientes conjuntos de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ son subespacios vectoriales
a) $A = \{\begin{bmatrix} a & b \\ -b & c \end{bmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}\}$, b) $C = \{\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} | a, b \in \mathbb{R}\}$, c) $B = \{\begin{bmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{bmatrix} | a, b \in \mathbb{R}\}$

Ejercicio 4.4 .– Pruebe que las expresiones:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - l - m \\ x_2 &= l + m \end{aligned}$$

con $l, m \in \mathbb{R}$, no constituyen las ecuaciones de ningún subespacio de $\mathbb{R}^2$.

Suma directa.

Ejercicio 4.5 .– Sean los subespacios de $\mathbb{R}^3$:

$$S_1 = \{(0, y, z) | y, z \in \mathbb{R}\}, \quad S_2 = \{(x, 0, z) | x, z \in \mathbb{R}\}, \quad S_3 = \{(x, 0, 0) | x \in \mathbb{R}\}$$

a) Compruebe que $S_1 + S_2 \neq S_1 \cup S_2$.

b) Compruebe que la suma $S_1 + S_2$ no es directa.

c) Pruebe que $\mathbb{R}^3 = S_1 \oplus S_3$.

Ejercicio 4.6 .– Pruebe que $\mathbb{R}^n$ es la suma directa de los siguientes subespacios:

$$U = \{(x_1, ..., x_n) | x_1 + ... + x_n = 0\}, \quad W = \{(x_1, ..., x_n) | x_1 = ... = x_n\}$$

Ejercicio 4.7 .– Dado el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y los subespacios

$$U = \{(a, b, c) | a, b, c \in \mathbb{R}, a = b = c\}, \quad W = \{(0, x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Demuestre que: $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

Bases, sistemas generadores

Ejercicio 4.8 .– En $\mathbb{R}^3$ determine, según el valor de $a \in \mathbb{R}$, el rango de los siguientes sistemas de vectores:

a) { (a, 1, 1), (1, a, 1), (1, 1, a) }

b) { (a, 1, 1), (-1, - a, -1), (-1, -1, a) }

Ejercicio 4.9 .– Halle un sistema generador del subespacio S de $\mathbb{R}^3$ de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 &= l + 2m + 3n \\ x_2 &= l - m \\ x_3 &= -l - n \end{aligned}$$

con $l, m, n \in \mathbb{R}$. Estudie si (5, -1, -1) $\in S$ y (0, 0, -1) $\in S$.

Ejercicio 4.10 .– En el espacio vectorial $\mathbb{R}_3$[x] se consideran los subespacios:

$$A = \{p(x)|p(0) = 0\}, \quad B = \{p(x)|p(1) = 0\}, \quad C = \{p(x)|p(-1) = 0\}$$

Determine las ecuaciones cartesianas y una base de cada uno de ellos.

Ejercicio 4.11 .– Sea V el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$. Demuestre que $P_1 = 1 + x$, $P_2 = x + x^2$, $P_3 = 1 + x^2$ es base de V. Halle las coordenadas respecto de dicha base de $P = 3 + 2x + 5x^2$.

Ejercicio 4.12 .– Demuestre que

$$S = \{\begin{bmatrix} x & y \\ x - y & x + y \end{bmatrix} \text{tales que } x, y \in \mathbb{R}\},$$

es subespacio de $\mathcal{M}_{\in}(\mathbb{R})$. Halle una base de S.

Ejercicio 4.13 .– En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se consideran los vectores $v_1 = (-1, 4, -1, 2)$, $v_2 = (5, 2, -1, -2)$, $v_3 = (5, 13, -4, 2)$ y $v_4 = (13, 3, -2, -6)$. Pruebe que el subespacio engendrado por los dos primeros coincide con el engendrado por los dos últimos.

Ejercicio 4.14 .– a) Compruebe que los vectores $e_1 = (1, 2, -6)$, $e_2 = (0, 5, -1)$, $e_3 = (2, -1, 0)$ forman una base de $\mathbb{R}^3$
b) Pruebe que los vectores $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (0, 3, -1)$ son linenalmente independientes y sustitúyalos en la base anterior para construir una nueva base.

Ejercicio 4.15 .– En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$, halle una base que contenga:
a) al vector $v_=(1, 2, 1, 1)$
b) a los vectores $u_1 = (1, 1, 0, 2)$, $u_2 = (1, -1, 2, 0)$

Ejercicio 4.16 .– En el espacio vectorial $\mathbb{R}_n$[x], se pide:
a) demuestre que el polinomio x^n y sus n primeras derivadas forman una base de $\mathbb{R}_n$[x]
b) estudie si los vectores $p_1(x) = 1+3\,x+5\,x^2$, $p_2(x) = -1+2\,x^2$ y $p_3(x) = 3+3\,x+x^2$ son linealmente independientes.
c) sean $r_1(x) = 1 + x^2$, $r_2(x) = 1 - x^2$ y $V_1 =< r_1(x), r_2(x) >$. Sean $p(x) = 1 + 5\,x^2$, $r(x) = 1 + x$. Pertenecen $p(x)$ y $r(x)$ a V_1?.
d) Sea $V_2 =< p_1(x), p_2(x), p_3(x) >$. Calcule $V_1 + V_2$ y $V_1 \cap V_2$.

Suma e intersección de subespacios.

Ejercicio 4.17 .– En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios:

$$S = \{(x_1, ..., x_4\}|x_1 - x_2 = 0,\, x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}, T =< (1, 1, 2, 1), (2, 0, -1, 1) > .$$

Halle bases y dimensiones de $S, T, S + T$ y $S \cap T$.

Ejercicio 4.18 .– En $\mathcal{M}_{\in}(\mathbb{R})$ se consideran los conjuntos

$$V_1 = \{\begin{bmatrix} a & b \\ a-b & a+b \end{bmatrix}\}, \quad V_2 = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} |a + b + c + d = 0, 2a - c - d = 0$$

Pruebe que ambos son subespacios vectoriales t calcule bases de la intersección y de la suma.

Ejercicio 4.19 .– En $\mathbb{R}_3$[x] se considera la base B $= \{1, x, x^2, x^3\}$. Dados los subespacios:

$$U =< 2\,x + x^2, x - x^2, x + x^2 >, \quad W = \{x_2 + x_3 = 0,\, 2\,x_2 - x_3 = 0\},$$

$$V = \{x_1 = 0, x_2 = -\beta, x_3 = 0, x_4 = \alpha + \beta\}$$

calcule:
a) $U \cap W$; b) $U + W$; c) ¿son U y W suplementarios?; d) una base de $W \cap V$; e) ecuaciones cartesianas de $U + V$.

Ejercicio 4.20 .– Sea S el subespacio de $\mathbb{C}^4$ engendrado por los vectores: (0, 1, 1 + i, i); (1, 0, i, 0); (1, -2, -2-i, -2i); (1, -1, -1, i) y sea T el engendrado por los vectores: (1, 1, 1 + 2i, i); (0, 0, 0, 1); (1, 1, 1 + 2i, -1 + i). Halle bases y dimensiones de S, T, S + T y S ∩ T.

Ejercicio 4.21 .– Sea S el subespacio de Q^4 de ecuación $x_1 + 2x_3 = 0$. Halle una base de S y una base de un subespacio suplementario de S respecto de Q^4.

Ejercicio 4.22 .– Sea $T = \{p(x) \in Q_3[x]|\, p(1) = p(2)\}$. Pruebe que T es un subespacio de $Q_3[x]$. Halle una base de T y de un subespacio suplementario de T respecto de $Q_3[x]$.

Cambio de base.

Ejercicio 4.23 .– Sea B$_u$ $= \{u_1, u_2, u_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$ y a, b y c tres vectores de $\mathbb{R}^3$ cuyas coordenadas con respecto de B$_u$ son (1, 0, 1), (2,-1, 3), (1, 6, 2), respectivamente.
a) Demuestre que a, b, c son linealmente independientes.
b) Demuestre que a, b, c constituyen un sistema generador de $\mathbb{R}^3$
c) Halle las coordenadas del vector v de coordenadas (1, 8, 4) en la base B$_a$ $= \{a, b, c\}$ con respecto a la base B$_u$.

Ejercicio 4.24 .– a) Compruebe que las familias siguientes: $\{1 + x + 2\,x^2, 3 - x, 2\,x + x^2\}$, $\{-1 + 2\,x + x^2, 3 - x^2, 1 + x + 2\,x^2\}$ son bases de $\mathbb{R}_2$[x].
b) Halle las coordenadas respecto de la segunda base de lospolinomios cuyas coordenadas en la primera base son (1, 2, 1), (2, 1, 2).
Realize el ejercicio de dos formas: a) directamente, b) calculando la matriz de cambio de base y utilizándola para el cambio de coordenadas.

Ejercicio 4.25 .– Sea $B_u = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$, y $B_v = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $B_w = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ dos sistemas de vectores tales que:

$$\left\{\begin{array}{l} v_1 = u_2 + 3\,u_4 \\ v_2 = -u\,1 + u_2 \\ v_3 = -2\,u_1 - u_3 + 2\,u_4 \\ v_4 = -u_1 - u_2 - u_3 + u_4 \end{array}\right\}, \quad \left\{\begin{array}{l} w_1 = 2u_1 - 2u_2 + u_4 \\ w_2 = 2\,u_1 + u_2 + u_3 \\ w_3 = 3\,u_1 + u_3 - \ u_4 \\ w_4 = 2\ - u_2 - u_3 + u_4 \end{array}\right\}$$

a) Pruebe que B_v y B_w son bases de V.
b) Halle la matriz del cambio de coordenadas de B_v a B_w.
c) Halle las coordenadas en B_v del vector v cuyas coordenadas respecto de B_w son (2, 1, 0, -1).

Cuestiones

Ejercicio 4.26 .– Sea V un espacio vectorial sobre K, U_1, U_2 dos subespacios que no están contenidos uno en el otro. Demuestre que existe un vector en $U_1 + U_2$ que no pertenece a ninguno de ellos.

Ejercicio 4.27 .– Razone la certeza o falsedad de las afirmaciones siguientes:

a. Si $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ es una base de un espacio vectorial V, $\forall b \in V (b \neq 0_V)$, entonces, la familia $\{a_1 + b, a_2 + b, ..., a_n + b\}$ es una base de V.

b. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n sobre un cuerpo K. Entonces, $V = K < v_1 > \oplus K < v_2 > \oplus ... \oplus K < v_n >$ y $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es base de V.

c. Sean S, T, U tres subespacios distintos de un espacio vectorial V. Entonces,

$$\dim V = \dim S + \dim T + \dim U \Longrightarrow V = S \oplus T \oplus U.$$

d. Si $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es una base de un espacio vectorial V, la familia $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ dada por:

$$u_1 = v_1, u_2 = v_1 - v_2, ..., u_n = v_1 - v_2 - ... - v_n,$$

es una base de V.

e. Sea V un espacio vectorial sobre K y $S = K < \{u_1, u_2\} >$ y $T = K < \{v_1, v_2\} >$ dos subespacios de V.

$$S \cap T = \{0_V\} \Longrightarrow \{u_1, u_2, v_1, v_2\} \text{ es libre.}$$

f. Si $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ es una familia de vectores de V tal que $\{a_i, a_j\}$ es libre - $(i \neq j,\ i, j = 1, 2, ..., n)$, $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ es libre.

g. Si $\{u, v, w\}$ es una familia libre de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$, la familia $\{u + v, v + w, w + u\}$ es libre.