3 Grupos

Entender el concepto de grupo.

Ejercicio 3.1 .– Sea el conjunto $G = \{a, b, c\}$. Forme la tabla de una ley de composición definida en G para que sea grupo.

Ejercicio 3.2 .– Demuestre que si todos los elementos x de un grupo G verifican $x^2 = e$, entonces, el grupo G es abeliano.

Ejercicio 3.3 .– Demuestre que si en un grupo G, $\forall a, b \in G$ se verifica $(ab)^2 = a^2b^2$, entonces, el grupo G es abeliano.

Ejemplos.

Ejercicio 3.4 .– Demuestre que las funciones siguientes:

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = 1/x, \quad f_3(x) = 1 - x,$$

$$f_4(x) = 1/(1 - x), \quad f_5(x) = (x - 1)/x, \quad f_6(x) = x/(x - 1)$$

forman grupo con respecto a la ley de composición de aplicaciones.

Ejercicio 3.5 .– Demuestre que el conjunto de isometrías del triángulo equilátero forman un grupo con respecto a la composición de aplicaciones.

Ejercicio 3.6 .– Demuestre que el conjunto de permutaciones de 3 elementos forman un grupo con respecto al producto de permutaciones.

Operar en un grupo.

Ejercicio 3.7 .– Sea G un grupo y sean $a, b \in G$ tales que $b\,a = a\,b^k$. Demuestre que se verifican las siguientes igualdades:

a) $b^i\,a = a\,b^{ik}$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

b) $b\,a^j = a^j\,b^{kj}$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

c) $b^i a^j = a^j b^{ik}$, $\forall i, j \in \mathbb{N}$.

Subgrupo.

Ejercicio 3.8 .– Encuentre subgrupos del grupo del ejercicio 3.5

Ejercicio 3.9 .– Encuentre subgrupos del grupo del ejercicio 3.6

Clasificar los elementos. Subgrupos normales. Grupo cociente.

Ejercicio 3.10 .– Sean M y N subgrupos normales del grupo G tales que $M \cap N = \{e\}$. Demuestre que para todo $x \in M$ y para todo $y \in N$ se cumple: $x \cdot y = y \cdot x$

Grupo cociente.

Ejercicio 3.11 .– Construya el conjunto cociente $\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ y pruebe que $(\mathbb{Z}_3, +)$ es grupo (llamado grupo de los números enteros congruentes módulo 3 ó de las congruencias módulo 3)

Ejercicio 3.12 .– Dados los conjuntos $A = \{2^x \cdot 3^y \mid (x,y) \in Z \times Z\}$, $B = \{2^u \mid u \in Z\}$:

a. Compruebe que A es grupo y B es un subgrupo de A con respecto al producto

b. Estudie A/B, es decir, construya sus elementos y la operación inducida y compruebe que es grupo

Engendrar algunos subgrupos.

Ejercicio 3.13 .– Encuentre el subgrupo S de $(GL(2), \cdot)$ engendrado por las matrices

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

¿Cuál es el orden de S?

Ejercicio 3.14 .– Sea el grupo G engendrado por los elmentos a, b $(a \neq b)$ tales $a^4 = b^4 = e$, $a^2 = b^2$ y $a \cdot b \cdot a = b \quad (a \cdot b = b \cdot a^3)$

a) Demuestre que G es de orden 8 y forme su tabla.

b) Pruebe que todo subgrupo de G es normal y que la intersección de dos subgrupos distintos de $\{e\}$ es un subgrupo distinto de $\{e\}$.