2 Sistemas de ecuaciones lineales

Discutir y resolver sistemas lineales.

Ejercicio 2.1 .– Resuelva los sistemas lineales siguientes

$$\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2-x_3=1 \\ x_1-2x_2+x_3=0 \\ x_2-x_3=0 \end{array}\right. ,\quad \left\{\begin{array}{l} 2x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1-x_2+x_3=0 \\ 3x_1-x_2+2x_3=2 \end{array}\right. ,\quad \left\{\begin{array}{l} x_1+x_3-x_4=5 \\ x_2+x_3+x_4=2 \end{array}\right. ,\quad \left\{\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ 2x+y+z=3 \\ x-y-2z=1 \\ 3x+2y+2z=4 \end{array}\right.$$

Ejercicio 2.2 .– Discuta y resuelva, según los valores de los parámetros (α,β), los sistemas lineales

$$\left\{\begin{array}{l} x+y-z=1 \\ x+\alpha y+3z=2 \\ 2x+3y+\alpha z=3 \end{array}\right. ,\quad \left\{\begin{array}{l} 2u+4v+\beta w+2z=6 \\ 3v+3w+z=4 \\ 2u+7v+9w+7z=8 \\ \alpha u+6w+5z=-4 \end{array}\right. ,\quad \left\{\begin{array}{l} \alpha x_2+7x_3+8x_4=0 \\ \beta x_3+6x_4=0 \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0 \\ 5x_3+6x_4=0 \end{array}\right.$$

Ejercicio 2.3 .– Discuta y resuelva, según los valores del parámetro γ, el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} \gamma x+y+z=1 \\ x+\gamma y+z=\gamma \\ x+y+\gamma z=\gamma^2 \end{array}\right.$$

Ejercicio 2.4 .– Considere el sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y-3u=-1 \\ x-y+z+u=1 \\ 2x+y+z-2u=0 \\ 3x+2z-u=1 \\ 3y-z-4u=-2 \end{array}\right.$$

a. Exprese todas las posibles soluciones del sistema lineal homogéneo asociado al anterior como combinación lineal de vectores libres.

b. Compruebe que $x=1$, $y=5$, $z=1$, $u=4$ es solución del sistema original y exprese, sin realizar cálculos adicionales, todas las soluciones del sistema original.

c. Compruebe que los vectores que ha obtenido en el apartado anterior son, efectivamente, soluciones del sistema original.

Ejercicio 2.5 .– Demuestre que el sistema

$$\begin{array}{l} ax+by=0, \\ cx+dy=0, \end{array}$$

es compatible indeterminado si y sólo si $ad-bc=0$.

Cálculo del rango.

Ejercicio 2.6 .– Encuentre el rango de la siguiente familia de columnas de una matriz: $\{(1,0,1,0),\ (2,1,3,1),\ (0,1,1,1),\ (2,2,4,2),(-1,0,0,3)\}$

Ejercicio 2.7 .– Calcule el rango de las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 4 \\ 6 & -5 & -1 & 2 \\ 7 & -2 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & 5 & 7 \\ 6 & -9 & 4 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2.8 .– Determine, según el valor del parámetro a, el rango de las siguientes matrices y calcule su inversa en los casos favorables.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1/a \\ a & -1 \end{pmatrix}, \; a \neq 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cálculo del determinante

Ejercicio 2.9 .– Mediante operaciones elementales, calcule los determinantes

$$\begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4 & 4 & 8 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ t & 1 & t & t^2 \\ t^2 & t & 1 & t \\ t^3 & t^2 & t & 1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & y & 2x+3y \\ 4 & 3 & 17 \\ z & t & 2z+3t \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

Cálculo de la inversa

Ejercicio 2.10 .– Calcule la inversa del siguiente producto de matrices elementales (3×3)

$$P = P_{21}(1) P_{23} P_{32}(-1) Q_2(2)$$

de dos formas:

a. realizando el producto y calculando la inversa por Gauss–Jordan;

b. aplicando las propiedades teóricas que conozcas sobre inversa del producto e inversas de las matrices elementales.

Calcule el determinante de P igualmente de dos formas: directamente y con propiedades de determinantes de las matrices elementales.

Factorización LU.

Ejercicio 2.11 .– Calcule, si es posible, la descomposición LU de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2.12 .– Resuelvar el siguiente sistema lineal

$$\begin{aligned} &5x + 2y + z = 12 \\ &5x - 6y + 2z = -1 \\ &-4x + 2y + z = 3 \end{aligned}$$

empleando la descomposición LU de la matriz de coeficientes.

Métodos numéricos.

Ejercicio 2.13 .– Resuelva el siguiente sistema lineal

$$\begin{aligned} &9x - 2y = 5 \\ &-2x + 4y - z = 1 \\ &-y + z = -5/6 \end{aligned}$$

empleando los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel.

Ejercicio 2.14 .– Analice y aplique los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel para los siguientes sistemas lineales

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2.15 .– Resuelva el siguiente sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

por eliminación gaussiana sin pivotaje y con pivotaje parcial