1 Matrices

Operaciones con matrices.

Ejercicio 1.1 .– De un ejemplo de dos matrices P y Q que se puedan multiplicar a izquierda y derecha (es decir, de forma que se puedan calcular PQ y QP), pero tales que PQ y QP sean matrices de distinto tamaño.

Ejercicio 1.2 .– De un ejemplo de matrices 2×2, P y Q tales que $PQ \neq QP$. Por tanto, el producto de matrices 2×2 no es conmutativo (basta con que falle un caso).

Ejercicio 1.3 .– Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcule AB y $A^2 = AA$. ¿Qué se puede deducir de estos ejemplos en contraste con la multiplicación de números reales?

Cálculo de la matriz inversa.

Ejercicio 1.4 .– Determine, según el valor del parámetro a, el rango de las siguientes matrices y calcule su inversa en los casos favorables.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1/a \\ a & -1 \end{pmatrix}, \; a \neq 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 1.5 .– Sea L una matriz triangular inferior 3×3

$$L = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

con a, c y f no nulos. Observando el procedimiento (Gauss–Jordan) de cálculo de la inversa de una matriz, ¿por qué se puede asegurar que L tiene inversa? Demuestre que además L^{-1} también es triangular inferior. Enuncie el resultado correspondiente para matrices triangulares inferiores $n \times n$.

Ejercicio 1.6 .– Calcule la matriz inversa de las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 1.7 .– Calcule el rango de las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -3 & 6 & 2 \\ 2 & -2 & -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 1.8 .– Discuta la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a. Si A y B son matrices cuadradas n x n,

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$$

b. $A\,B = (O) \Longrightarrow A = (O)$ ó $B = (O)$.

c. Si $A, B \in M_K(m,n)$, entonces:

$$A\,X = B\,X, \quad \forall X \in M_K(m,n) \Longrightarrow A = B$$

$$X\,A = X\,B, \quad \forall X \in M_K(p,m) \Longrightarrow A = B$$

d. Rango (A + B) = rango A + rango B.

Ejercicio 1.9 .– Sea A una matriz de $M_K(2)$. Pruebe que existen $a, b \in K$ tales que $A^2 - aA + bI = (O)$. Si A es inversible, halle su matriz inversa.

Descomponer matrices en bloques para sumar y multiplicar.

Ejercicio 1.10 .– Descomponga las matrices siguientes en bloques para sumar y multiplicar siempre que se pueda

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ b & c & 0 & 1 \\ d & e & f & 1 \end{pmatrix}, \quad C = B^T, \quad D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ b & c & 0 & 1 \\ d & e & f & 1 \\ h & i & j & k \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz inversa por bloques.

Ejercicio 1.11 .– Sea la matriz M siguiente:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

donde A, B y C son matrices regulares $n \times n$. Demuestre que

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & Q \\ R & C^{-1} \end{pmatrix},$$

para ciertas matrices Q y R que debe encontrar.

Ejercicio 1.12 .– Verifique que

$$\begin{pmatrix} A & H & G \\ 0 & B & F \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}\,H\,B^{-1} & A^{-1}\,H\,B^{-1}\,F\,C^{-1} - A^{-1}\,G\,C^{-1} \\ 0 & B^{-1} & -B^{-1}\,F\,C^{-1} \\ 0 & 0 & C^{-1} \end{pmatrix},$$

donde A, B y C son matrices regulares.

Cálculo de determinantes.

Ejercicio 1.13 .– Calcule los determinantes siguientes:

$$\begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4 & 4 & 8 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ t & 1 & t & t^2 \\ t^2 & t & 1 & t \\ t^3 & t^2 & t & 1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & y & 2x+3y \\ 4 & 3 & 17 \\ z & t & 2z+3t \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

Ejercicio 1.14 .– Si $B = M^{-1}AM$, pruebe que $|A| = |B|$.

Ejercicio 1.15 .– De un contraejemplo de: $|A+B| = |A| + |B|$.

Cambios en el determinante al realizar transformaciones en A.

Ejercicio 1.16 .– Calcule el determinante de la matriz

$$M = \begin{pmatrix} x & a & b & c & d \\ a & x & b & c & d \\ a & b & x & c & d \\ a & b & c & x & d \\ a & b & c & d & x \end{pmatrix},$$

Calcular el determinante por bloques.

Ejercicio 1.17 .– Dada la matriz A por bloques, donde P y Q son matrices cuadradas,

$$A = \begin{pmatrix} P & Q \\ 0 & R \end{pmatrix},$$

pruebe que: $\det A = \det P \det R$