10 Geometría diferencial

Ejercicio 10.1 Dada la curva $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 2\,t)$, obtener la parametrización en términos de su parámetro natural. Encontrar el vector tangente.

Ejercicio 10.2 Dada la curva $\mathbf{r}(t) = (1 + \cos t, \operatorname{sen} t, 2\,\operatorname{sen}(t/2))$, a) demostrar que es regular, b) encontrar el vector tangente, c) comprobar que está contenida en

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,|x^2 + y^2 + z^2 = 4, (x - 1)^2 + y^2 = 1\}$$

Ejercicio 10.3 Hallar las ecuaciones de la recta tangente y del plano normal a la curva $\mathbf{r}(t) = (1 + t, -t^2, 1 + t^3)$, en t = 1

Ejercicio 10.4 Calcular la longitud de las curvas
$\mathbf{r}(t) = (a\,\cos^3 t, a\,\operatorname{sen}^3 t), t \in [0, 2\,\pi]$ y
$\mathbf{r}(t) = (a\,(t - \operatorname{sen} t), a\,(1 - \cos t)), t \in [0, 2\,\pi]$ (cicloide)

Ejercicio 10.5 Calcular la longitud de la curva en polares $\rho = (1+\cos\theta), \theta \in [0, 2\,\pi]$

Ejercicio 10.6 Calcular la longitud de la curva en cartesianas $y^2 = 4\,x - x^2$ entre los puntos (0, 0) y (1, $\sqrt{3}$)

Ejercicio 10.7 Hallar el vector curvatura y la curvatura $|\kappa|$ de la curva $\mathbf{r}(t) = (t, 1/2\,t^2, 1/3\,t^3)$

Ejercicio 10.8 Hallar el triedro de Frènet de la curva $\mathbf{r}(t) = (3\,t - t^3, 3\,t^2, 3\,t + t^3)$

Ejercicio 10.9 Hallar el plano osculador a la curva $\mathbf{r}(t) = (3\,t - t^3, 3\,t^2, 3\,t + t^3)$ en t = 1.

Ejercicio 10.10 Hallar la curvatura y la torsión en cualquier punto de la curva
a) $\mathbf{r}(t) = (3\,t - t^3, 3\,t^2, 3\,t + t^3)$
b) $\mathbf{r}(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t, t)$

Ejercicio 10.11 Establecer una parametrización de las curvas y superficies siguientes:
a) El triángulo de vértices (0, 0), (1, 1), (1, 0)
b) La curva intersección de $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 = a\,x$
c) La porción de esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = a\,x$ con $z > 0$
d) La superficie de revolución obtenida al girar en torno al eje OZ la curva contenida en el plano OXZ de ecuación $z = (x^2 - 1)(x^2 - 4), x \in (-2, 3)$

Ejercicio 10.12 Demostrar que $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, f(u, v))$ es una representación paramétrica regular, si f es regular.

Ejercicio 10.13 Se consideran las superficies siguientes:
a) Paraboloide elíptico (a, b > 0): $\mathbf{r}(u, v) = (a\,u\,\cos v, b\,u\,\operatorname{sen} v, u^2)$
b) Superficie de revolución: $\mathbf{r}(u, v) = (u\,\cos v, u\,\operatorname{sen} v, f(u))$
c) Toro $(0 < b < a)$: $\mathbf{r}(u, v) = ((a + b\,\cos u)\,\operatorname{sen} v, (a + b\,\cos u)\,\cos v, b\,\operatorname{sen} u)$
Encontrar el vector normal en los puntos regulares.

Ejercicio 10.14 Hallar las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a la superficie $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$ en el punto correspondiente a u = 1, v = 1

Ejercicio 10.15 Demostrar que la curva dada por $e^{\theta} = t$, $\operatorname{tg}(\phi/2)t$, $t > 0$ sobre la esfera $\mathbf{r}(u, v) = (\cos\theta \operatorname{sen}\phi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\phi)$ corta a los meridianos con un ángulo $\alpha = \pi/4$

Ejercicio 10.16 Hallar el área de las superficies siguientes:

a) $z^2 = 2\,x\,y, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < y < 1, \quad z > 0$

b) La intersección de $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 = a\,x$

Ejercicio 10.17 Hallar la primera forma fundamental de la superficie de revolución $\mathbf{r}(u, v) = (f(t)\,\cos\theta, f(t)\,\operatorname{sen}\theta, g(t))$

Ejercicio 10.18 Hallar la longitud de la curva $u = e^{\theta \operatorname{ctg}\beta/\sqrt{2}}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $\beta =$ constante, sobre el cono descrito por $\mathbf{r}(u, v) = (u\,\cos\theta, u\,\operatorname{sen}\theta, u)$

Ejercicio 10.19 Demostrar que la superficie $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, u^2 + v^3)$ es elíptica si $v > 0$, hiperbólica si $v < 0$ y parabólica si $v = 0$.