7. Formas bilineales y cuadráticas

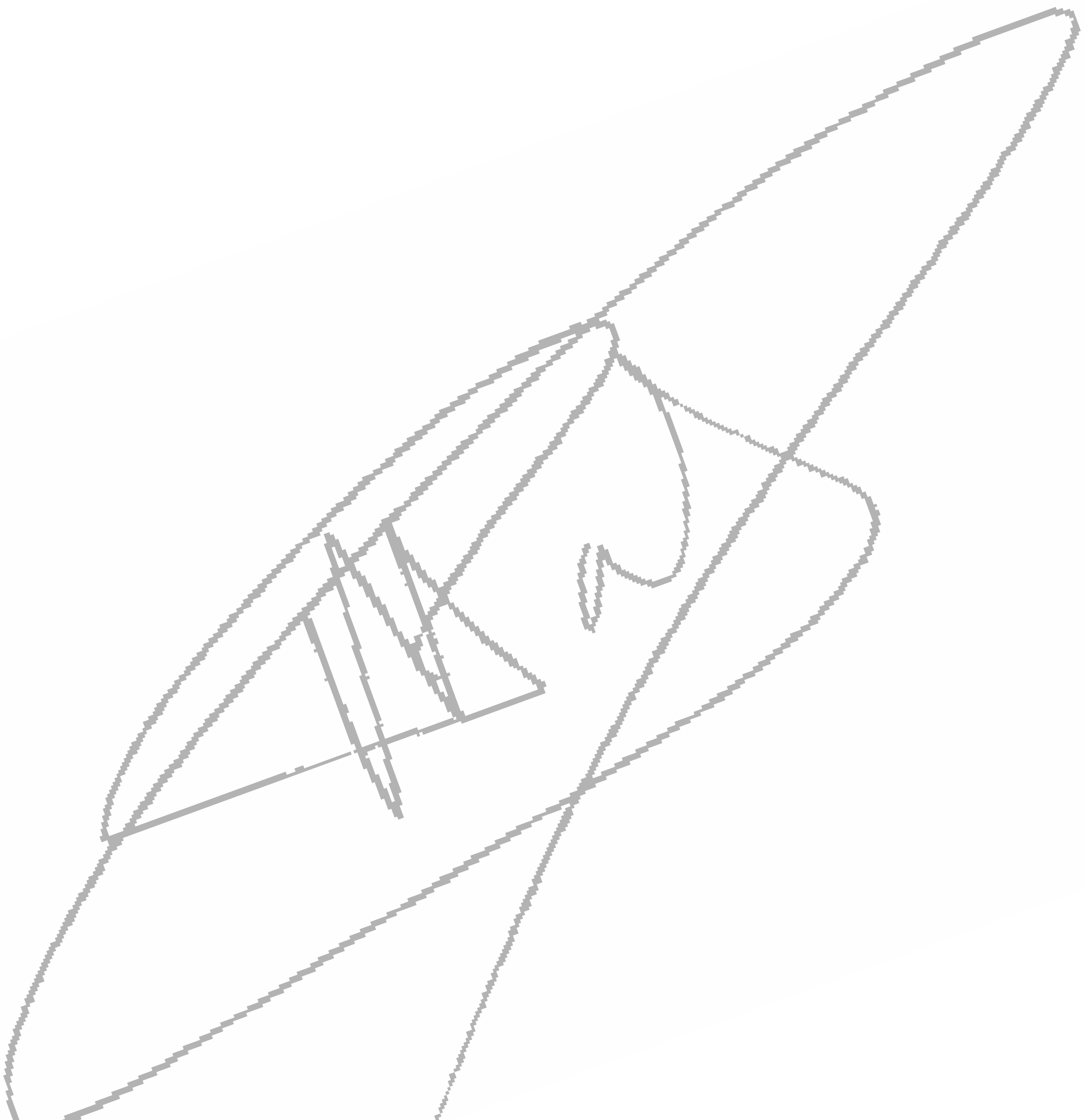
Manuel Palacios

Departamento de Matemática Aplicada

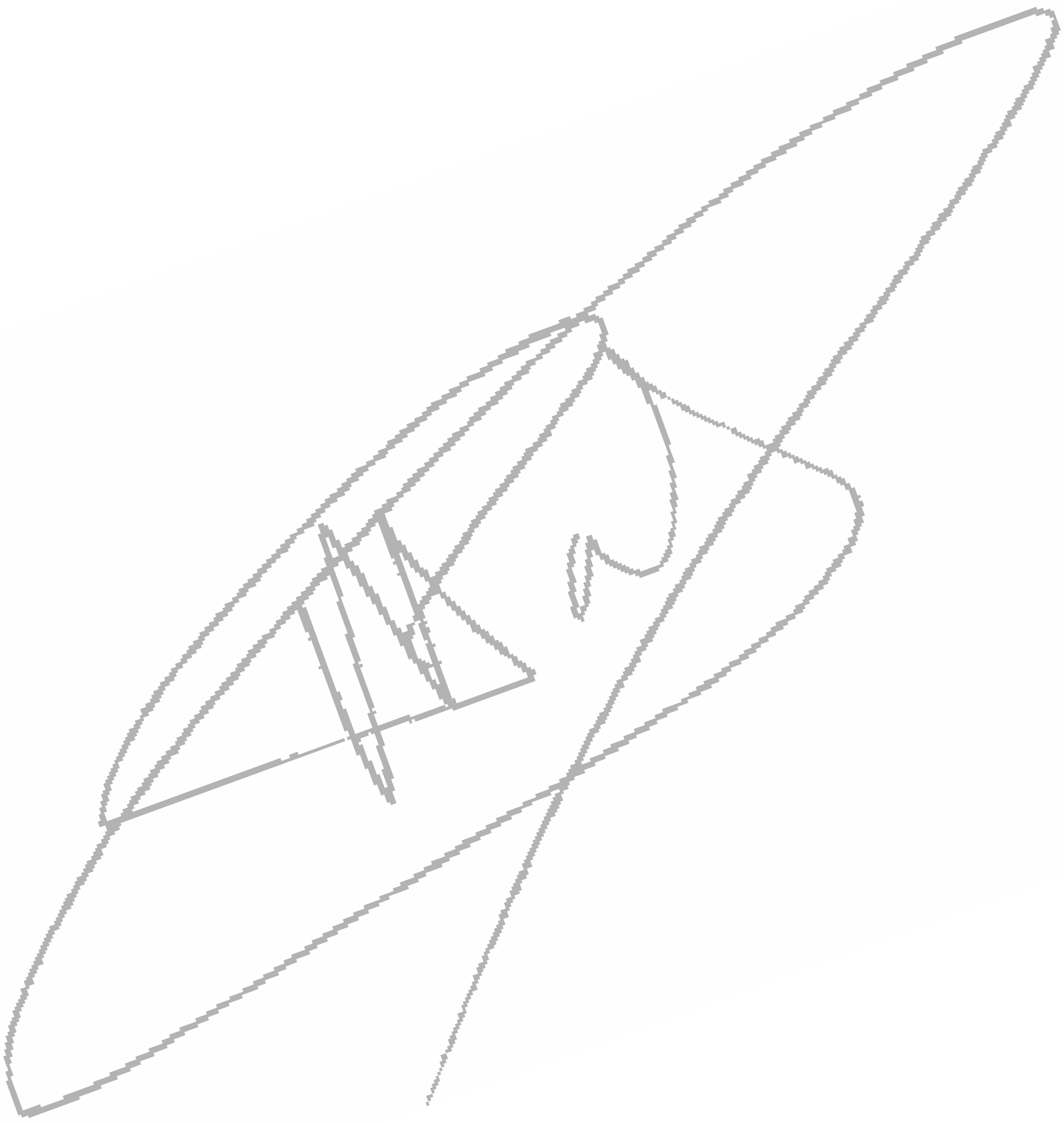
Centro Politécnico Superior

Universidad de Zaragoza

Otoño 2010



Contents



Bibliography

[1] Merino, L. y Santos, E.: Álgebra lineal con métodos elementales. *Thomson*. 2006.

[2] Palacios, M.: Enunciados de ejercicios de Matemáticas II, grado Ing. Tecn. Industr. http://pcmap.unizar.es/∼mpala. 2010

[3] Villa, A. de la: Problemas de Álgebra. *CLAGSA*. 1988.

[4] Arvesu, J.; Marcellán, F. y Sánchez J.: Problemas resueltos de Álgebra lineal. Paso a paso. *Thomson*. 2005.

[5] Rojo, J.: Álgebra lineal. *Vector Ediciones, Madrid*. 1989.

[6] Rojo, J. y Martín, I.: Ejercicios y problemas de Álgebra lineal. *Editorial AC, Madrid*. 1989

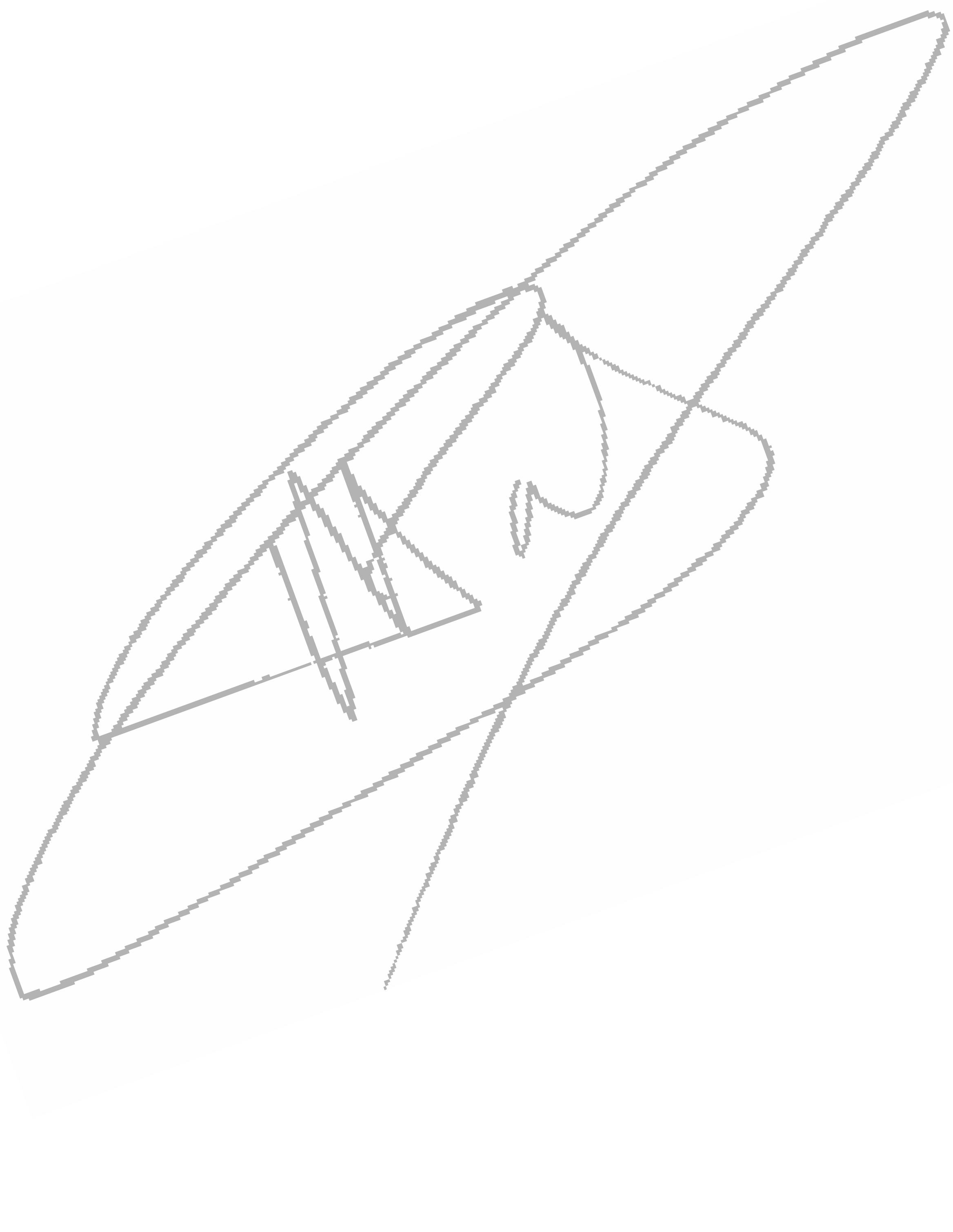
[7] Burgos, J. de: Álgebra lineal y geometría cartesiana. *McGraw-Hill*. 2000.

[8] Burgos, J. de: Álgebra lineal. *McGraw-Hill*. 1993.

[9] Diego, B. de et al. : Problemas de Álgebra lineal (2^a ed.). *Deimos*. 1986.

[10] Griffel, D. G.: Linear Algebra and its Applications. (Vol. 1 & 2) *Ellis Horwood*. 1989.

[11] Hernández, E.: Álgebra y geometría. *Addison-Wesley, Universidad Autónoma de Madrid*. 1994.



Chapter 7

Formas bilineales y cuadráticas

7.1 Formas bilineales.

En éste y en el próximo capítulos, vamos a introducir una forma de medir en un espacio vectorial, es decir, vamos definir el concepto general de medida o métrica y el de ángulo, lo que nos permitirá generalizar también los conceptos de área y de volumen. Para ello, tomaremos como ejemplo el espacio ordinario y el producto escalar ordinario. En todo el capítulo consideraremos un espacio vectorial V sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

7.1.1 Definiciones y ejemplos

Definición 7.1.1 *Se denomina* **forma bilineal** *sobre* V *a toda aplicación* $F : V \times V \longrightarrow K$ *que verifique las siguientes condiciones:*

1a) $\forall u_1, u_2, v \in V, \quad F(u_1 + u_2, v) = F(u_1, v) + F(u_2, v)$
1b) $\forall u_1, u_2, v \in V, \quad F(v, u_1 + u_2) = F(v, u_1) + F(v, u_2)$
2a) $\forall u, v \in V, \quad \forall t \in K, \quad F(tv, u) = t\,F(v, u)$
2b) $\forall u, v \in V, \quad \forall t \in K, \quad F(v, tu) = t\,F(v, u)$

Si $K = \mathbb{C}$, la *forma bilineal* sobre V se denomina **forma sesquilineal** sobre V. En este caso, la propiedad 2b debe ser escrita en la forma:
2b') $\forall u, v \in V, \quad \forall t \in K, \quad F(v, tu) = \bar{t}\,F(v, u)$, $\bar{t}$ es el conjugado de $\in \mathbb{C}$

Ejemplo 7.1.2 *En el espacio vectorial* V *de* $dim_{\mathbb{R}} V = n$*, se considera la base* $\{v_i\}$ *y el conjunto de escalares* $\{\alpha_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\} \subset \mathbb{R}$*. Entonces, la aplicación* $F : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$(u, v) \hookrightarrow \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i\, y_j$$

en donde $u = (x_1, ..., x_n), v = (y_1, ..., y_n)$*, es una forma bilineal.*

Caso particular del anterior es el siguiente:

Ejemplo 7.1.3 *Sea* $V = \mathbb{R}^n$,

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) \hookrightarrow x_1 y_1 + ... + x_n y_n$$

que resulta al tomar los escalares $\alpha_{ij} = \delta_{ij}$ *(deltas de Krönecker)*

Consecuencias inmediatas de la definición, cuya demostración es análoga a la vista en otras ocasiones, son las siguientes:

Consecuencia 7.1.4 *1)* $F(u, 0_V) = 0_K, \quad \forall u \in V$
2) $F(-u, v) = -F(u, v) = F(u, -v), \quad \forall u, v \in V$
3) $F(\sum_i t_i\, u_i, \sum_j s_j\, v_j) = \sum_{i,j} t_i\, s_j\, F(u_i\, v_j), \quad \forall u_i,\, v_j \in V$

7.1.2 Expresión coordenada de una forma bilineal.

Si $\{v_i\}$ una base de V y X e Y son, respectivamente, las matrices coordenadas de los vectores x e y en dicha base, se puede escribir:

$$x = [v_1 v_2 \ldots v_n]\, X = \sum_{i=1}^{n} x^i\, v_i, \quad y = [v_1 v_2 \ldots v_n]\, Y = \sum_{j=1}^{n} y^j\, v_j$$

y, por lo tanto, según la consecuencia 7.1.4(3

$$F(x, y) = F(\sum_{i=1}^{n} x^i\, v_i, \sum_{j=1}^{n} y^j\, v_j) = \sum_{i=1}^{n} x^i F(v_i, \sum_{j=1}^{n} y^j\, v_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x^i \sum_{j=1}^{n} y^j F(v_i, v_j) = (x_1, ..., x_n)^T\, A\, (y_1, ..., y_n) = X^T\, A\, Y$$

en donde

$$A = \begin{bmatrix} F(v_1, v_1) & F(v_1, v_2) & ... & F(v_1, v_n) \\ F(v_2, v_1) & F(v_2, v_2) & ... & F(v_2, v_n) \\ ... & ... & ... & ... \\ F(v_n, v_1) & F(v_n, v_2) & ... & F(v_n, v_n) \end{bmatrix}$$

Naturalmente, $A \in M_{\mathrm{R}}(n)$

Definición 7.1.5 1. *La expresión*

$$F(x, y) = X^T\, A\, Y, \quad \forall x, y \in V$$

es denominada **expresión coordenada** *o matricial de la forma bilineal* F *respecto de la base* $\{v_i\}$

2. *La matriz* A *anterior se denomina* **matriz coordenada** *de (o asociada a) la forma bilineal* F *respecto de la base* $\{v_i\}$

Ejemplo 7.1.6 *La matriz coordenada de la forma bilineal*

$$F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \longrightarrow x_1\, y_1 + 3x_1\, y_2 - x_2\, y_1 + 2x_2\, y_2$$

respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^2$: $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$ tiene los siguientes elementos:
$F(e_1,e_1) = 1, F(e_1,e_2) = 3, F(e_2,e_1) = -1, F(e_2,e_2) = 2$, es decir,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

por lo que la expresión coordenada será:

$$F((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = (x_1\, x_2) A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

En particular, para los vectores $(1,2), (-1,3)$ se tiene:

$$F((1,2),(0,3)) = (1\,2)\, A \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = (-1, 7) \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = (-1)\,(-1) + 7 \cdot 3 = 22$$

En el caso del ejemplo 7.1.3:

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) \hookrightarrow x_1 y_1 + ... + x_n y_n$$

la matriz coordenada resulta ser la matriz unidad y la expresión matricial $F(x,y) = X^T\, Y$ se identifica rápidamente con la del producto escalar ordinario en $\mathbb{R}^3$.

Teorema 7.1.7 *Si $F : V \times V \longrightarrow K$ es una forma bilineal sobre V y $F(x,y) = X^T A Y$ es su expresión coordenada respecto de una cierta base, entonces, el conjunto de matrices coordenadas de F es*

$$\{B \in M_K(n) \mid \exists P \in GL_K(n) \text{ tal que } B = P\, A\, P^T\}.$$

Dem.:

$\Longrightarrow]$ $\forall x, y \in V, \quad F(x,y) = X_v^T\, A\, Y_v$ respecto de la base $\{v_1, ..., v_n\}$.

Considérese otra base $\mathrm{B}_w = \{w_1, ..., w_n\}$ de V y sea B la matriz coordenada de F respecto de dicha base, la expresión coordenada ahora es: $\forall x, y \in V, \quad F(x,y) = {X_w}^T\, B\, Y_w$.

Si la relación entre ambas bases está definida en términos matriciales por:

$$[w_1 w_2 \ldots w_n] = [v_1 v_2 \ldots v_n]\, Q\,, \text{ o bien por: } X_v = Q\, X_w,$$

en donde los elementos de las columnas de la matriz Q son las coordenadas de los vectores $\{w_j\}$ respecto de la base $\{v_i\}$, sustituyendo se puede obtener:

$$F(x,y) = X_v^T\, A\, Y_v = {X_w}^T\, P\, A\, P^T\, Y_w, \quad \text{donde } P = Q^T$$

es decir, la expresión coordenada en la otra base. En consecuencia,

$$B = P\, A\, P^T \quad , \qquad P \in GL_K(n)$$

$\Longleftarrow$] Dada la matriz $B = PAP^T$ $P \in GL_K(n)$, es suficiente tomar la nueva base $\{w_1, ..., w_n\}$ definida por $[w_1 \ldots w_n] = [v_1 \ldots v_n]\, P^T$ para ver que B es la matriz coordenada de F en dicha base. ■

Definición 7.1.8 *Dos matrices $A, B \in M_K(n)$ se dicen* **congruentes** *si existe una matriz $P \in GL_K(n)$ tal que $B = PAP^T$.*

Algunas **observaciones** a tener en cuenta:

- La relación binaria definida en $M_K(n)$ mediante:

$$\forall A, B \in M_K(n), \quad A \sim B \Longleftrightarrow \quad \text{A y B son congruentes},$$

  es una relación de equivalencia.

- El conjunto de matrices coordenadas de una forma bilineal sobre V es una de las clases de **congruencia**.

- Dos matrices congruentes son equivalentes y, por tanto, tienen el mismo rango. Es suficiente observar que P^T es también regular y, en consecuencia, $B = PAP^T \Longrightarrow$ A y B son equivalentes.

Definición 7.1.9 *Sea $F : V \times V \longrightarrow K$ una forma bilineal.*

- *Se denomina* **rango** *de F al rango de una cualquiera de sus matrices coordenadas.*
- *Se dice que F es* **regular**, *si $rgF = n = dim_K V$.*
- *Se dice que F es* **singular** *o* **degenerada** *si $rgF < n = dim_K V$*

7.2 Formas cuadráticas

Seguimos considerando un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$.

Definición 7.2.1 *Se denomina* **forma** *bilineal* **simétrica** *sobre V a toda forma bilineal F sobre V simétrica, es decir, tal que*

$$\forall u, v \in V, \quad F(u, v) = F(v, u).$$

Ejemplo 7.2.2 *La forma bilineal siguiente (cf. ejemplo 7.1.6):*

$$F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \longrightarrow x_1 y_1 + 3x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2$$

no es simétrica

Ejemplo 7.2.3 *La forma bilineal considerada en el ejemplo 7.1.3 es simétrica.*

Ejemplo 7.2.4 *La forma bilineal*

$$F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$F(x, y) = F((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1$$

es una forma simétrica.

En efecto:

$$F(y,x) = 2y_1\, x_1 + y_1\, x_2 + y_2\, x_1$$

Por lo tanto,

$$F(y,x) = 2x_1\, y_1 + x_1\, y_2 + x_2\, y_1$$

Teorema 7.2.5 *Sea $F : V \times V \longrightarrow K$ una forma bilineal. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *F es simétrica*
2. *$\forall A \in M_K(n)$ matriz coordenada de F es simétrica, es decir, $A^T = A$*

Dem.:
1) $\Longrightarrow$ 2)] Sea A la matriz coordenada de F respecto a la base $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Se tiene:

$$A = (F(v_i, v_j)_{i,j=1}^n) \Rightarrow A^T = (F(v_j, v_i)) = (F(v_i, v_j)) = A$$

2) $\Longrightarrow$ 1)] Sea A la matriz simétrica coordenada de F respecto a la base $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Entonces:

$$\forall u, v \in V, \quad F(u,v) = X^T\, A\, Y = (X^T\, A\, Y)^T = Y^T\, A^T\, X = Y^T\, A\, X = F(v,u),$$

luego F es simétrica. ■

Teorema 7.2.6 *Sea $A \in M_K(n)$, se verifica:*

1. *A simétrica $\Leftrightarrow A^T$ es simétrica.*
2. *A simétrica $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}, A^n$ es simétrica.*
3. *Si A es regular y A simétrica $\Leftrightarrow A^{-1}$ es simétrica.*

Definición 7.2.7 *Sea V un espacio vectorial sobre K, $K = \mathbb{R}$. Se denomina* **forma cuadrática** *sobre V a toda aplicación*

$$Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

que cumple:

$$\forall v \in V, \quad Q(v) = F(v,v)$$

siendo F una forma bilineal sobre V.

Observése (cf. [1][Merino]) que, en principio, la F podría ser una forma sesquilineal cualquiera, no necesariamente simétrica.

Consecuencia 7.2.8 1. *$\forall v \in V, \quad Q(v) = F(v,v) \in \mathbb{R}$*

2. *$\forall v \in V, \forall t \in K, \quad Q(tv) = |t|^2\, Q(v)$*
3. *Toda forma simétrica, F, induce una forma cuadrática, Q, y, recíprocamente, dada una forma cuadrática Q puede determinarse la única forma simétrica F.*

Dem.: Si $K = \mathbb{R}$, basta observar que

$$\forall u, v \in V, \quad F(u,v) = \frac{1}{2}\,[Q(u+v) - Q(u) - Q(v)] \tag{7.1}$$

Definición 7.2.9 *La forma simétrica única inducida por una forma cuadrática se denomina* **forma polar** *asociada a Q.*

Nota: La fórmula (7.1) es llamada *fórmula de polarización*.

7.2.1 Expresión coordenada de una forma cuadrática

Sea F la forma polar asociada a la forma cuadrática Q; fijada una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V, la expresión coordenada de F será:

$$\forall u, v \in V, \quad F(u, v) = X^T A Y$$

siendo A su matriz coordenada, que será simétrica. Entonces, la expresión coordenada de la forma cuadrática será:

$$\forall v \in V, \quad Q(v) = X^T A X$$

Ejemplo 7.2.10 *Dada la forma simétrica*

$$F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$F(x, y) = F((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1\, y_1 + x_1\, y_2 + x_2\, y_1$$

su forma cuadrática asociada es:

$$Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2\, x_1\, x_2$$

Así, por ejemplo,

$$Q(2, 3) = 2 \cdot |2|^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 = 20$$

Ejemplo 7.2.11 *Sea $V = \mathcal{C}[0, 1]$ y F la forma bilineal simétrica dada por*

$$\forall f, g \in V, \quad F(f, g) = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx$$

la forma cuadrática asociada es

$$Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$Q(f) = \int_0^1 f^2(x)\, dx$$

7.3 Ortogonalización.

Definición 7.3.1 *Sea $f : V \times V \longrightarrow K, K = \mathbb{R}$, una forma simétrica sobre V*

- *Dos* **vectores** *v y w de V se dicen* **conjugados u ortogonales***, y se escribe $v \perp w$, si F(v,w) = 0.*

- *Un* **vector** *$v \in V$ se dice* **conjugado u ortogonal a un subconjunto** *$S \subseteq V$, y se escribe $v \perp S$, si F(v,w) = 0,*

- *Dos* **subconjuntos** *S y T se dicen* **conjugados u ortogonales***, y escribimos $S \perp T$, si $F(v, w) = 0, \forall v \in S, \forall w \in T$*

Obsérvese que $F(v,w)=0 \Longleftrightarrow F(w,v)=0$

Definición 7.3.2 *Dado un subconjunto $S \subset V$, F una forma simétrica sobre V, se denomina* **complemento ortogonal** *de S, $S^{\perp}$, al subconjunto*

$$S^{\perp}=\{v \in V \mid F(v,w)=0, \forall w \in S\}$$

Proposición 7.3.3 *i) $S^{\perp}$ es un subespacio vectorial de $V, \forall S \subseteq V$*

ii) $v \perp \{v_1,...,v_r\} \Longleftrightarrow v \perp K\{v_1,...,v_r\}$

iii) $S \subseteq ((S^{\perp})^{\perp}), \forall S \subseteq V$.

Dem.:

i) $0 \in S^{\perp} \Rightarrow S^{\perp} \neq \phi$

$\forall v_1,v_2 \in S^{\perp}$, $\forall t_1,t_2 \in K, F(t_1\,v_1+t_2\,v_2,w)=t_1\,F(v_1,w)+t_2\,F(v_2,w)=t_1\,0+t_2\,0=0, \forall w \in S$

ii)$\Longleftarrow$) Es inmediata

$\Longrightarrow$) $\forall w \in K\{v_1,\ldots,v_r\}\, \exists t_i \in K, i=1,2,\ldots,r$ tal que $w=t_1\,v_1+\ldots+t_r\,v_r$

$$F(\sum_{i=1}^{r} t_i\,v_i,v)=\sum_{i=1}^{r} t_i\,F(v_i,v)=0 \Longrightarrow v \perp K\{v_1,\ldots,v_r\}$$

iii)

$$\forall v \in S, w \in S^{\perp}, F(v,w)=0 \Longrightarrow v \perp S^{\perp} \Longrightarrow v \in (S^{\perp})^{\perp} \blacksquare$$

Observese que, en general, $S^{\perp} \neq (S^{\perp})^{\perp}$. Por ejemplo, consideremos la forma simétrica siguiente:

$$F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \hookrightarrow x_1y_1$$

y el subespacio $S=\mathbb{R}\{(1,1)\}$. Entonces,

$$S^{\perp}=\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1=0\}=\mathbb{R}\{(0,1)\}$$

$$(S^{\perp})^{\perp}=\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1,x_2)\perp(0,1)\}=\mathbb{R}^2$$

Proposición 7.3.4 $\forall S \leq V$, *$dim_K S^{\perp} \geq dim_K V - dim_K S$.*

Dem.: Sea $\{v_1,\ldots,v_p\}$ una base de S. La aplicación

$$g: V \longrightarrow K^p$$

$$v \hookrightarrow g(v)=(F(v,v_1),...,F(v,v_r))$$

es lineal, ya que f es bilineal. Además, $ker\, g=S^{\perp}$ y

$$v \in kerg \Longleftrightarrow g(v)=0 \Longleftrightarrow \forall i=1,\ldots,p,\ F(v_i,v)=0 \Longleftrightarrow v \in S^{\perp}$$

Ahora, tenemos

$$dimV=dim\,ker\,g+rg\,g \leq dim\,ker\,g+dimK^p=dimS^{\perp}+p$$

Luego $\quad dim_K\,S^{\perp} \geq dim_K\,V-dim_K\,S.$ $\blacksquare$

Ejercicio 7.3.5 *Dada la forma simétrica*

$$F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \hookrightarrow x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + x_3\, y_3$$

obtener el complemento ortogonal del subespacio $S = \mathbb{R}\{(1, 2, 0)\}$

Definición 7.3.6 *Sea F una forma simétrica sobre V. Se denomina* **núcleo de f** *al complemento ortogonal de V, es decir,*

$$V^\perp = \{v \in V \mid F(v, w) = 0, \forall w \in V\}$$

Teorema 7.3.7 $V^\perp = \{0_V\} \iff F$ *es regular.*

Dem.:

$$v \in V^\perp \iff \forall w \in V, F(v, w) = X^T\, A\, Y = 0_K, \forall Y^T \in K^n \iff X^T\, A = 0 \iff A\, X = 0.$$

Pero como $V^\perp = \{0_V\}$, el sistema solo tiene una única solución, es decir, rg $A = n \iff F$ es regular. ■

Definición 7.3.8 *Sea F una forma simétrica sobre V*

- $v \in V$ *se dice* **vector isótropo** *si* $F(v, v) = 0_K$
- $S \leq V$ *se dice* **subespacio isótropo** *si* $F(v, w) = 0_K, \forall v, w \in S$

Propiedad 7.3.9 $S \leq V$ *es isótropo* $\iff \forall v \in S$, v *es isótropo.*

Ejemplo 7.3.10 *La forma bilineal simétrica sobre* $\mathbb{R}^2$,

$$F(v, w) = x_1\, y_2 + x_2\, y_1$$

tiene como únicos subespacios isótropos los siguientes:

$$\{(0, 0)\}, \quad \mathbb{R}\{(1, 0)\}, \quad \mathbb{R}\{0, 1)\}$$

Ejemplo 7.3.11 *El núcleo de la forma simétrica sobre* $\mathbb{R}_3[x]$,

$$F(p(x),\, q(x)) = p'(0)\, q'(0)$$

es

$$(\mathbb{R}_3[x])^\perp = \{a_0 + a_2\, x^2 + a_3\, x^3\}$$

y los subespacios isótropos serán subespacios engendrados por polinomios sin término en x.

Teorema 7.3.12 *Dada una forma simétrica F sobre V, si $v_0 \in V$ no es isótropo, se cumple:*

$$V = K\{v_0\} \oplus K\{v_0\}^\perp$$

Dem.: En primer lugar, cualquier vector $v \in V$ se puede poner como suma de uno de $K\{v_0\}$ y otro de $K\{v_0\}^\perp$. En efecto, basta poner:

$$v = \frac{F(v,v_0)}{F(v_0,v_0)}\,v_0 + (v - \frac{F(v,v_0)}{F(v_0,v_0)}\,v_0)$$

los dos sumandos cumplen: $F(v_0,v_0) \neq 0$ y

$$F(v - \frac{F(v,v_0)}{F(v_0,v_0)}v_0, v_0) = F(v,v_0) - \frac{F(v,v_0)}{F(v_0,v_0)}\,F(v_0,v_0) = F(v,v_0) - F(v,v_0) = 0,$$

es decir, pertenece a $K\{v_0\}^\perp$.

Además, la suma es directa, ya que

$$\forall v \in K\{v_0\} \cap K\{v_0\}^\perp \Longrightarrow \exists t \in K,\, v = t\ v_0, \quad F(v,v_0) = 0$$

lo que implica $t = 0$, es decir, $v = 0$. ■

Corolario 7.3.13 *Si $v_0 \in S$ es no isótropo,*

$$S = K\{v_0\} \oplus (K\{v_0\}^\perp \cap S)$$

Definición 7.3.14 *Sea v_0 no isótropo, al vector*

$$\frac{F(v,v_0)}{F(v_0,v_0)}\,v_0$$

se le denomina **proyección ortogonal** *de $v \in V$ sobre v_0 y se le designa por $\overline{proy}_{v_o} v$.*

Por ejemplo, dada la forma simétrica sobre $\mathbb{R}^3$

$$F(v,w) = x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + x_3\,y_3$$

la proyección ortogonal del vector $v = (1,0,1)$ sobre el vector $v_0 = (1,1,0)$ es el vector $(1/2, 1/2, 0)$.

7.4 Diagonalización

El problema de la diagonalización de formas cuadráticas puede ser atacado por diversos procedimientos. Cada uno de ellos busca una base del espacio vectorial V de tipo finito sobre K respecto de la cual la matriz coordenada de la formacuadrática Q es diagonal, por lo que, si P^T es la matriz del cambio a la nueva base y A y D son las matrices coordenadas de Q respecto de ambas bases, se ha de verificar que

$$P\,A\,P^T = D.$$

Se pueden considerar 3 situaciones:

a) la base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es ortogonal, es decir, está compuesta por vectores conjugados, que cumplen $F(v_i, v_j) = 0$; A y D son congruentes.

b) caso de que P sea simplemente regular, A y D son congruentes;

c) caso particular de a), la base es ortonormada de vectores propios y la matriz P es , A y D son congruentes ortogonales (lo estudiaremos más adelante).

7.4.1 Diagonalización ortogonal

Como consecuencia del teorema 7.3.12 y de su concecuencia 7.3.13, dada una forma simétrica F sobre V, siempre se puede encontrar una base de V de vectores conjugados respecto de la cual la matriz coordenada de F es diagonal. Veámoslo.

Definición 7.4.1 *Dada una forma simétrica F sobre V, una* **base** $\{v_1, ..., v_n\}$ *se dice* **ortogonal** *(o de vectores conjugados) si* $F(v_i, v_j) = 0_K, \quad \forall i \neq j$

Teorema 7.4.2 *Para cualquier subespacio $S \leq V$ se puede encontrar una base ortogonal.*

Dem.: Se demuestra por inducción sobre $r = dim_K S$. Si $r = 1$, es trivial. Supóngase cierto para $r - 1$. Se presentan dos situaciones:

1) $\forall v \in S, \quad F(v, v) = 0$. En consecuencia, S es isótropo y todas las bases de S son ortogonales.

2) $\exists v_0 \in S, \quad F(v_0, v_0) \neq 0$. Aplicando el corolario 7.3.13, se obtiene:

$$S = K\{v_0\} \oplus (K\{v_0\}^{\perp} \cap S)$$

Por lo tanto, $dim\,(K\{v_0\}^{\perp} \cap S) = r - 1 < r$ y, por hipótesis de inducción, existe una base ortogonal $\{v_1, ..., v_{r-1}\}$ de $K\{v_0\}^{\perp} \cap S$. En consecuencia, $\{v_0, v_1, ..., v_{r-1}\}$ es una base ortogonal de S. ■

Corolario 7.4.3 *V posee una base ortogonal.*

Obsérvese que la matriz coordenada de F respecto de una base ortogonal $\{v_1, ..., v_n\}$ de V es la matriz A diagonal

$$A = \begin{bmatrix} F(v_1, v_1) & & \\ & \ddots & \\ & & F(v_n, v_n) \end{bmatrix}$$

y, evidentemente, el número de vectores no isótropos de esta base (es decir, el número de elementos no nulos de esta diagonal) es el rango de F.

Teorema 7.4.4 *Existe una base de vectores propios de la matriz coordenada de F bilineal simétrica que es ortogonal.*

Propiedad 7.4.5 *Toda matriz simétrica admite una matriz congruente simétrica diagonal.*

Dem.: Basta considerar la forma simétrica asociada. ■

Así pues, para llegar a una base ortogonal se puede: 1) construir una base de vectores propios, o bien, 2) construir una base ortogonal cualquiera. Para ello se puede utilizar el que llamaremos *método de los conjugados*.

Veamos a continuación ejemplos de ambos procedimientos.

Ejemplo 7.4.6 *Dada la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

encontrar una matriz cuadrada P regular tal que $P^T\ A\ P$ sea diagonal

Solución 1) Base ortogonal de vectores propios

```
(%i1) A:matrix([0,1,1],[1,0,-1],[1,-1,0])$
(%i2) vvpA:eigenvectors(A);
(%o2) [ [ [ -2 , 1 ] , [ 1 , 2 ] ] , [ [ [ 1 , - 1 , - 1 ] ] , [ [ 1 , 0 , 1 ] , [ 0 , 1 , - 1 ] ] ] ]
(%i3) vecp:vvpA[2]$ v1:vecp[1][1]$ v2:vecp[2][1]$ v3:vecp[2][2]$
    Esta es una base de vectores propios no ortogonal.
P:addcol(transpose(matrix(v1)),v2,v3); Pt:transpose(P)$
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
(%i4) Pt.A.P;
```

$$\begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

```
   que no es diagonal. Luego, hay que tomar una base ortogonal de vectores propios.
v3 = v3 - proy_v2(v3)
(%i5) v3:v3-(v2.A.v3)/(v3.A.v3)*v2;
P:addcol(transpose(matrix(v1)),v2,v3); Pt:transpose(P)$
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

```
(%i6) D:Pt.A.P;
```

$$\begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix}$$

La matriz de cambio de la base canónica a la de vectores propios ortogonales es P. ■
Observar que la diagonal D no tiene los valores propios en ella.

2) Base ortogonal de vectores cualesquiera.
Como *nullspace*(A) $= 0$, se puede escoger $v_1 = (1, 0, 1)$ no isótropo.
Ahora, se busca $v_2 = (x, y, z)$ tal que $v_1 \cdot A \cdot v_2 = 0 \Longrightarrow v_2 = (-1, 1, 1)$
Ahora, se busca $v_3 = (x, y, z)$ tal que $v_1 \cdot A \cdot v_3 = 0$ y $v_2 \cdot A \cdot v_3 = 0 \Longrightarrow v_3 = (-1, -2, 1)$

Por lo tanto, $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$D = P^T\, A\, P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

Observar que las dos diagonales encontradas son distintas, aunque ambas son congruentes con A.

Ejercicio 7.4.7 *Sea la forma cuadrática sobre $\mathbb{R}^3$ definida por: $Q(x) = X^T\, A\, X$, siendo la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

encontrar una matriz diagonal congruente con A, utilizando el método de los conjugados.

Solución:

```
a = {{0,1,1},{1,-2,2},{1,2,-1}};  q[v_List]:= v.a.v;

NullSpace[a]
    {}

La forma cuadrática es regular ==> existen vectores no isótropos.
Tomamos v1 no isótropo
v1 = {0,1,0};

S1 = subespacio ortogonal a v1 = {v={x,y,z}| v1.a.v = 0}
v={x,y,z}$  solve[v1.a.v == 0, v];
{{2 y - 2 z, y, z}}

Escogemos
v2 = {2, 1, 0}

que es no isótropo
S2 = subespacio ortogonal a v1 y v2  = {v = {x,y,z} | v1.a.v = 0,  v2.a.v = 0 }
v={x,y,z}$   solve[{v1.a.v == 0,v2.a.v == 0}, v];
{{-4 z, -z, z}}

Escogemos
v3 = {4, 1, -1}

Nueva base: {v1,v2,v3} = {e1,e2,e3}.mq, siendo  mq = Transpose[p]
mp = {v1,v2,v3} = {{0, 1, 0}, {2, 1, 0}, {4, 1, -1}}

La matriz coordenada de q en la nueva base es diagonal
mp.a.transpose[mp] = {{-2, 0, 0}, {0, 2, 0}, {0, 0, -7}}

Luego la matriz P pedida es la transpuesta de  la mp hallada
P = transpose[mp];  P//MatrixForm
     0    2    4
     1    1    1
     0    0    -1
```

7.4.2 Diagonalización por congruencias.

Asociados a la situación b) (7.4) mencionaremos dos métodos.

El método más clásico para obtener la matriz D diagonal es el **método de Lagrange o de Gauss**. Este consiste en transformar la expresión coordenada de Q, respecto de la base inicial, en una suma de cuadrados de expresiones lineales en las coordenadas en número $r \leq n$. El conjunto de esas expresiones lineales (si $r < n$ habrá que añadir $n - r$ ecuaciones del tipo $y_i = x_i$) define las ecuaciones del cambio de coordenadas de la base nueva a la antigua; a partir de éstas se puede escribir inmediatamente la matriz P^{-1}.

Otro método consiste en utilizar las operaciones elementales y las matrices elementales para obtener una matriz diagonal congruente a la matriz coordenada de una forma cuadrática, determinando fácilmente la matriz del cambio a la base nueva. Este método lo denominaremos **método de diagonalización por congruencia** o de operaciones elementales, ya que consiste en realizar operaciones elementales de congruencia sobre la matriz A coordenada de la forma cuadrática, es decir, efectuar las mismas operaciones elementales sobre filas y columnas para llegar a una diagonal congruente; basta recordar que las operaciones sobre columnas requieren la utilización de la matriz elemental transpuesta de la utilizada para hacer la misma operación sobre las filas.

Ejercicios resueltos de estos tipos, además de los que se presentan a continuación, pueden verse en [6]

En el próximo ejercicio todos los pivotes necesarios son distintos de cero.

Ejercicio 7.4.8 *Sea la forma cuadrática sobre* $\mathbb{R}^3$ *definida por:* $Q(x) = X^T\,A\,X$, *siendo la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

encontrar una matriz diagonal congruente con A.

Solución:

```
mai=addcol(a,ident(3));
              {1, 1, 0, 1, 0, 0},
              {1, 2, 2, 0, 1, 0},
              {0, 2, 5, 0, 0, 1}

ele1 = el[2,1,-1,3]; mai=ele1.mai.el[1,2,-1,6];
              {1, 0, 0, 1, 0, 0},
              {0, 1, 2, -1, 1, 0},
              {0, 2, 5, 0, 0, 1}

 ele2 = el[3,2,-2,3]; mai=ele2.mai.el[2,3,-2,6];
              {1, 0, 0, 1, 0, 0},
              {0, 1, 0, -1, 1, 0},
              {0, 0, 1, 2, -2, 1}

   di = submatrix(mai,4,5,6)
      p =  submatrix(mai,1,2,3)

      {{1,0,0},{0,1,0},{0,0,1}}
      {{1,0,0},{-1,1,0},{2,-2,1}}

p.a.Transpose[p]==di
     True

Matriz del cambio de la base {v_i} a la base nueva {w_k}:

q = Transpose[p]
     {{1,-1,2},{0,1,-2},{0,0,1}}

Nueva base
{w1,w2,w3} == {v1,v2,v3}.q]
               w1 == v1,
               w2 == -v1 + v2,
               w3 == 2 v1 - 2 v2 + v3
```

En el caso de que alguno de los pivotes a utilizar sea nulo se le suma a la fila y columna correspondientes una de las posteriores y se sigue como en los ejemplos anteriores. Veamos un ejemplo.

Ejercicio 7.4.9 *Sea la forma cuadrática sobre* $\mathbb{R}^3$ *definida por:* $Q(x) = X^T\,A\,X$, *siendo la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

encontrar una matriz diagonal congruente con A.

Solución:

```
mai=addcol(a,ident(3));
          {0, 1, 1, 1, 0, 0},
          {1, 0, 1, 0, 1, 0},
          {1, 1, 0, 0, 0, 1}

ele1 = el[1,2,1,3]; mai=ele1.mai.el[2,1,1,6];
          {2, 1, 2, 1, 1, 0},
          {1, 0, 1, 0, 1, 0},
          {2, 1, 0, 0, 0, 1}

ele2 = el[2,1,-1/2,3]; mai=ele2.mai.el[1,2,-1/2,6];
          {2, 0, 2, 1, 1, 0},
          {0, -1/2, 0, -1/2, 1/2, 0},
          {2, 0, 0, 0, 0, 1}

ele3 = el[3,1,-1,3];mai=ele3.mai.el[1,3,-1,6];
          {2, 0, 0, 1, 1, 0},
          {0, -1/2, 0, -1/2, 1/2, 0},
          {0, 0, -2, -1, -1, 1}

   di = submatrix(mai,4,5,6)
      p =  submatrix(mai,1,2,3)
           {{2, 0, 0}, {0, -1/2, 0}, {0, 0, -2}}
           {{1, 1, 0}, {-1/2, 1/2, 0}, {-1, -1, 1}}

p.a.transpose[p]=di
         True

Matriz del cambio de la base {v_i} a la base nueva {w_k}:
q = transpose[p]
         {{1, -1/2 -1}, {1, 1/2, -1}, {0, 0, 1}}

Nueva base
    Thread[{w1,w2,w3} == {v1,v2,v3}.q]//MatrixForm
          w1 == v1 + v2,
          w2 == -v1/2 + v2/2,
          w3 == -v1 - v2 + v3
```

7.4.3 Clasificación lineal de las formas cuadráticas.

La diferencia entre los dos métodos presentados es que, siempre que los pivotes a utilizar no se anulen, el método de congruencias (y también el método de Lagrange) proporciona una matriz de cambio de base triangular, mientras que la del método de los conjugados no es triangular en general.

De cualquier modo que se proceda, ya que la matriz coordenada de la forma cuadrática respecto de la nueva base es diagonal, resulta que ésta será una base ortogonal respecto de Q. En consecuencia, podemos dar la siguiente definición.

Definición 7.4.10 *Sea Q una forma cuadrática Q sobre V. Se denomina* **signatura** *de una base ortogonal $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V al número de vectores v_i tales que $Q(v_i) > 0$.*

Teorema 7.4.11 *(***Ley de inercia de Sylvester***) Todas las bases ortogonales tienen la misma signatura.*

Dem.: Sean dos bases $\{v_1, \ldots, v_s, v_{s+1}, \ldots, v_n\}$ y $\{w_1, \ldots, w_{s'}, w_{s'+1}, \ldots, w_n\}$ con signaturas respectivas s y s'.

Sean $S = K\{v_1, \ldots, v_s\}$ y $T = K\{w_{s'+1}, \ldots, w_n\}$. Entonces, si $v \in S$, $Q(v) \geq 0$, y si $v \in T$, $Q(v) \leq 0$. Por lo tanto, $S \cap T = \{0_V\}$ y la suma de S y T es suma directa, luego:

$$\dim\,(S+T) = s + n - s' \leq n \Longrightarrow s \leq s'$$

Cambiando los papeles de las bases resultaría: $s' \leq s$. Luego, $s = s'$. ■

Definición 7.4.12 *Sea Q una forma cuadrática sobre V. Se denomina* **signatura** *de Q (o de su forma polar) a la signatura de cualquier base ortogonal.*

Definición 7.4.13 *Sea A una matriz simétrica. Se denomina* **signatura** *de A a la signatura de la forma cuadrática asociada*

Observación.- Ya que todas las matrices coordenadas de una forma cuadrática tienen el mismo rango y la misma signatura, el número de elementos positivos y el de negativos en cualquier forma diagonal es el mismo, por eso algunos autores prefieren denominar signatura al par (s, t) en donde s es la signatura (número de los positivos) y t = r - s (número de los negativos = rango de Q menos signatura).

Definición 7.4.14 *Se dice que una forma cuadrática Q es definida (positiva o negativa) si $Q(v) > 0, \forall v \in V$ o si $Q(v) < 0, \forall v \in V$, respectivamente.*

Se dice que una forma cuadrática Q es semidefinida (positiva o negativa) si $Q(v) \geq 0, \forall v \in V$ o si $Q(v) \leq 0, \forall v \in V$, respectivamente.

Se dice que una forma cuadrática Q es indefinida si $Q(v) \geq 0$, para algunos $v \in V$ y $Q(v) \leq 0$, para otros $v \in V$.

De igual forma se denominará a la matriz coordenada de un forma cuadrática.

Observación.- En el conjunto de las formas cuadráticas puede definirse una relación de equivalencia:

$$Q \sim Q' \Longleftrightarrow \text{rg } Q = \text{rg } Q' \quad \text{y sig } Q = \text{sig } Q'$$

lo cual permite realizar la siguiente clasificación

Teorema 7.4.15

1. *Q es definida positiva $\Longleftrightarrow$ rg Q = sig Q = dim V*

2. *Q es definida negativa $\Longleftrightarrow$ rg Q = dim V y sig $Q = 0$*

3. *Q es semidefinida positiva $\Longleftrightarrow$ rg Q = sig Q < dim V*

4. *Q es semidefinida negativa $\Longleftrightarrow$ rg Q < dim V y sig $Q = 0$*

5. *Q es indefinida $\Longleftrightarrow$ rg $Q \leq$ dim V y $0 <$ sig Q < rg Q*

Ejemplo 7.4.16 *La forma cuadrática del ejemplo 7.4.8 tiene como una de sus matrices diagonales: diag (1, 1, 1), así que tiene: rg Q = 3, sig Q = 3, por lo tanto, es definida positiva.*

Ejemplo 7.4.17 *La forma cuadrática del ejemplo 7.4.9 tiene como una de sus matrices diagonales: diag (2, -1/2, -2), así que tiene: rg Q = 3, sig Q = 1, por lo tanto, es indefinida.*

Ejemplo 7.4.18 *La forma cuadrática del ejemplo 7.4.6 tiene como una de sus matrices diagonales: diag (2, -2, 2), así que tiene: rg Q = 3, sig Q = 2, por lo tanto, es indefinida.*

7.5 Aplicaciones

7.5.1 Extremos de funciones escalares

Una aplicación interesante del resultado precedente es la discusión de los puntos críticos de una función escalar de variable vectorial, en donde la forma cuadrática a estudiar es la hessiana de la función en cada uno de los puntos críticos: los máximos corresponden al caso definida negativa, los mínimos a definida positiva, puntos silla o puerto a indefinida, casos especiales a semidefinida.

Ejercicio 7.5.1 *Encontrar y discutir los puntos críticos de la función*

$$f(x,y) = 2 + (x+y)^2 - y\,sen(y) - x^3$$

cuya gráfica aparece en la figura 7.1.

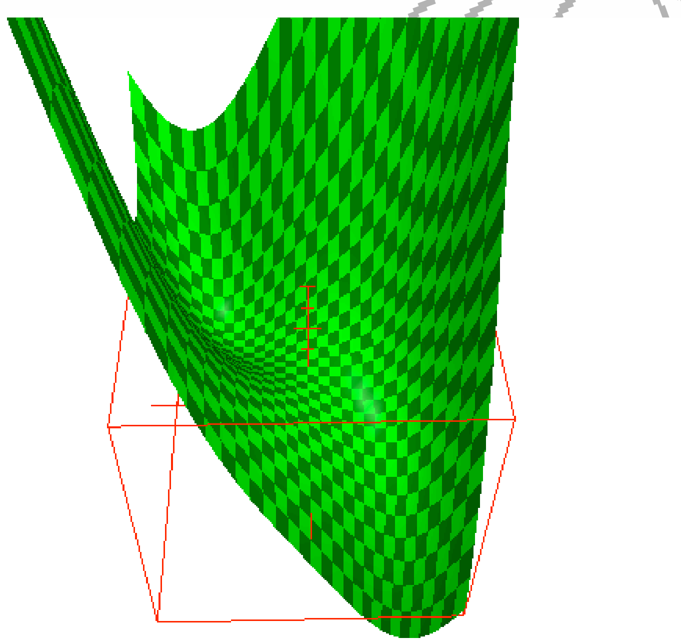


Figure 7.1: Gráfica de la función $f(x,y) = 2 + 2(x+y)^2 - y\operatorname{sen} y - x^3$.

7.5.2 Factorización de Cholesky

En el caso de que una matriz simétrica A (o la forma simétrica que ella define) sea definida positiva, se puede factorizar de un modo especialmente interesante por sus aplicaciones, como se ve en el siguiente

Teorema 7.5.2 *Sea $A \in M_{\mathrm{R}}(n)$,, una matriz simétrica y definida positiva. Entonces, existe una única matriz $C \in M_K(n)$, triangular inferior con $c_{ii} > 0$, tal que*

$$A = C\,C^T$$

Dem.: Basta realizar la diagonalización de la matriz A mediante el método de las “congruencias” o el de Lagrange hasta llegar a una matriz diagonal coincidente con la identidad.

Esto se puede conseguir siempre, pues, como la matriz A es definida positiva, todos los pivotes a utilizar serán estrictamente positivos y, en consecuencia, la matriz P tal que $P\,A\,P^T = I$ será triangular inferior regular.

Finalmente, la matriz $C = P^{-1}$ verifica: $A = C\,C^T$. ■

Definición 7.5.3 *La factorización presentada en el teorema anterior se denomina* **factorización de Cholesky** *de la matriz A simétrica.*

Ejercicio 7.5.4 *Encontrar la factorización de Cholesky de la matriz simétrica*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

(%i1)
```
A:matrix([3,1,0],[1,4,1],[0,1,3])$
```

(%i2)
```
load(eigen)$ eigenvalues(A);
```

(%o3) $[[2,3,5],[1,1,1]]$

(%i4)
```
ai:addcol(A,ident(3));
```

(%o4) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(%i5)
```
i:2$   j:1$ ai:rowop(ai,i,j,ai[i,j]/ai[j,j])$ ai[j,i]:0$ ai;
```

(%o9) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(%i10)
```
i:3$   j:2$ ai:rowop(ai,i,j,ai[i,j]/ai[j,j])$ ai[j,i]:0$ ai;
```

(%o14) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{30}{11} & \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} & 1 \end{pmatrix}$

Luego, rg A = 3, sg = 3 ==> A es definida positiva Se puede aplicar Cholesky

(%i15)
```
i:1$    el:sqrt(ai[i,i])$   ai[i]:ai[i]/el$  ai[i,i]:ai[i,i]/el$
i:2$    el:sqrt(ai[i,i])$   ai[i]:ai[i]/el$  ai[i,i]:ai[i,i]/el$
i:3$    el:sqrt(ai[i,i])$   ai[i]:ai[i]/el$  ai[i,i]:ai[i,i]/el$  ai;
```

(%o27) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}\,\sqrt{11}} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{11}\,\sqrt{30}} & -\frac{3}{\sqrt{11}\,\sqrt{30}} & \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}$

(%i28)
```
DA:submatrix(ai,4,5,6)$   Pt:submatrix(ai,1,2,3)$
print(DA,Pt)$
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}\,\sqrt{11}} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{11}\,\sqrt{30}} & -\frac{3}{\sqrt{11}\,\sqrt{30}} & \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}$$

(%i31) `C:invert(Pt);`

(%o31) $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}} & \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{11}} \end{pmatrix}$

(%i32) `is(A = C.transpose(C));`

(%o32)*true*

Observación

Esta factorización de Cholesky es muy útil y por eso suele aparecer en las librerías de los ordenadores, aunque no en la forma presentada aquí. Por el contrario, allí se supone que tal factorización existe y se determinan los elementos de la matriz L resolviendo las ecuaciones sucesivas (no simultaneas) que resultan al identificar los elementos de la matriz A y los de $C\,C^T$ en el orden siguiente: $a_{1\,1}, a_{2\,1}, \ldots, a_{n\,1}, a_{2\,2}, \ldots, a_{n\,2}, \ldots, a_{n\,n}$. Si alguno de los denominadores que aparecen se anula es debido a que la matriz inicial no es definida positiva y, en consecuencia, no se puede obtener esta factorización.

Aplicación

La factorización de Cholesky puede utilizarse para resolver sistemas de ecuaciones lineales con matriz asociada hermítica; tiene especial interés cuando dicho sistema debe ser resuelto un gran número de veces, ya que la matriz C puede ser guardada en la memoria del ordenador.

El proceso a seguir será el siguiente:
1) Obtener la factorización de Cholesky $A = C\,C^T$
2) Descomponer el sistema $A\,X = B$ en dos nuevos sistemas: $C\,Z = B, \quad C^T\,X = Z$
3) Resolver por sustitución progresiva el primer sistema
4) Resolver por sustitución regresiva el segundo sistema.

Ejemplo 7.5.5 *Resolver por el método de Cholesky el sistema $A\,X = B$, siendo*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

La matriz A es la del ejercicio 7.5.4, por lo que la C es la construida allí.

```
z:linsolve(C,b)
      {1/sqrt(3), 2/sqrt(3)/sqrt(11),sqrt(30/15/sqrt(11) }

x = linsolve[transpose(C),z]
      {4/15,1/5,- 1/15}
is(a.x = b)
     True
```

7.5.3 Descomposición L D L^T

En el caso de que una matriz simétrica A (o la forma simétrica que ella define) no sea definida positiva, no se puede obtener la factorización de Cholesky; sin embargo, se puede factorizar en la forma $A = L\,D\,L^T$, L triangular inferior, D diagonal, que también es interesante por sus aplicaciones. Si se exige que los elementos $l_{kk} = 1$, es única y será posible si en el proceso seguido para diagonalizar no surge ningún pivote igual a cero, lo cual equivale a que los menores principales de la matriz A son no nulos. En algunos libros aparece como **factorización de Crôut**.

El proceso para conseguir una tal factorización consiste en llegar a la forma diagonal D mediante alguno de los procedimientos explicados más arriba; habitualmente, se encuentra identificando los elementos de A con los del producto $L\,D\,L^T$ y resolviendo el sistema de ecuaciones que sale por sustitución.

Una aplicación inmediata de esta factorización es la **resolución de sistemas lineales** con matriz de coeficientes simétrica (no necesariamente definida positiva).

El proceso a seguir será el siguiente:
1) Obtener la factorización de Crôut $A = L\,D\,L^T$
2) Descomponer el sistema $A\,X = B$ en tres nuevos sistemas: $L\,Z = B, \quad D\,S = Z, \quad L^T\,X = S$
3) Resolver por sustitución progresiva el primero
4) Resolver el sistema diagonal
5) Resolver por sustitución regresiva el tercer sistema.

Ejemplo 7.5.6 *Resolver por el método de $L\ D\ L^T$ el sistema $A\,X = B$, siendo*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3/2 & 3/2 \\ 2 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

Diagonalizando la matriz A mediante el método de las congruencias (o resolviendo el sistema indicado en este apartado) se obtienen las matrices L y D siguientes:

```
L = {{1,0,0},{1,1,0},{1,1,1}}
D ={{2, 0, 0}, {0, -1/2, 0}, {0, 0, -2}}

Observar que la forma cuadrática asociada es indefinida.
z = linsolve[L,b]
      {2,0,1}

u=LinearSolve[D,z]
      {1, 0, -1/2}

x =LinearSolve[Transpose[L],u]
      {1, 1/2, -1/2}

Comprobación:
is(A.x = B)
      True
```

7.6 Ejercicios para resolver

Ejercicios de las hojas de enunciados de [2] (Palacios).