5. Aplicaciones lineales

Manuel Palacios

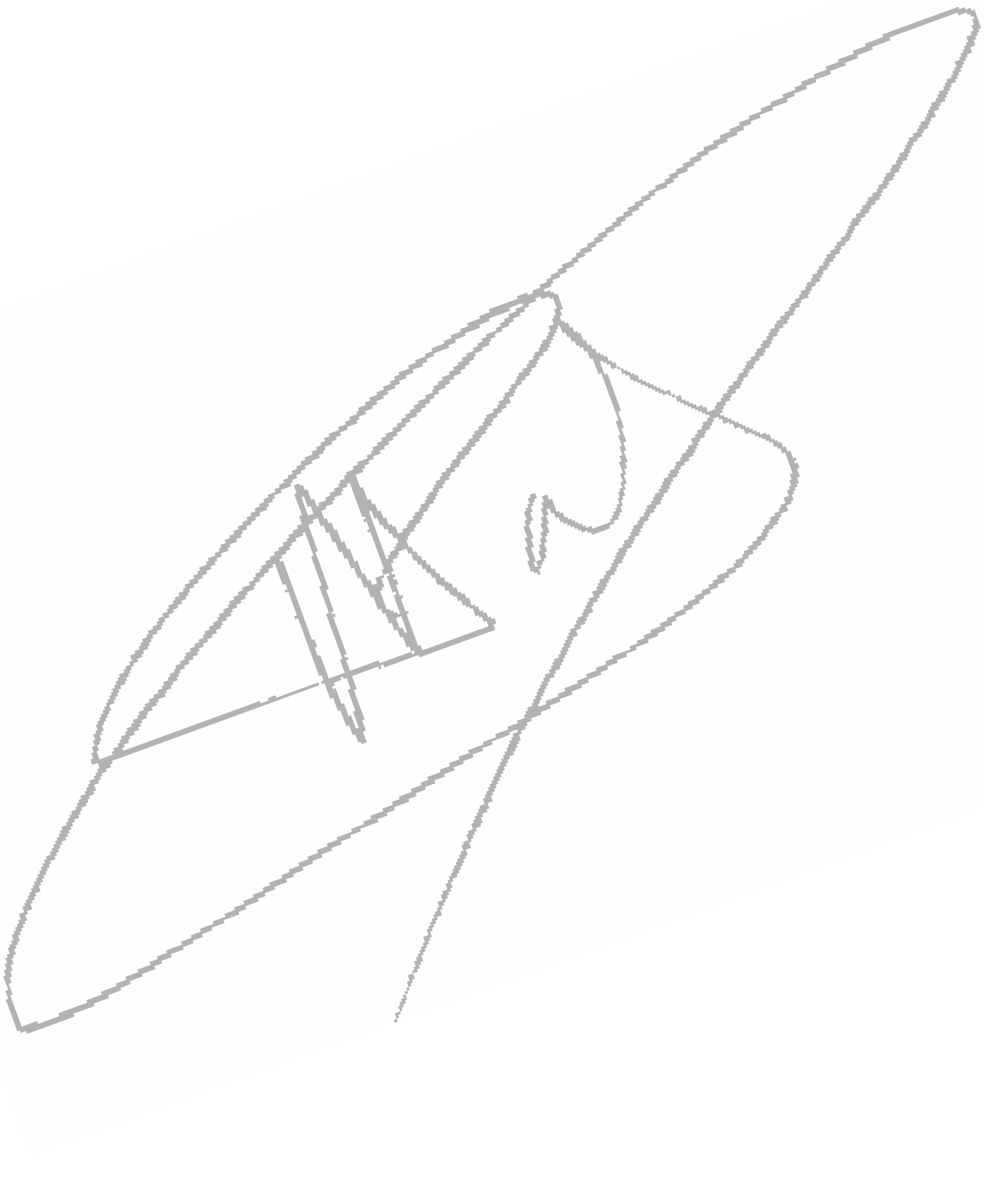
Departamento de Matemática Aplicada

Centro Politécnico Superior

Universidad de Zaragoza

Otoño 2010

Contents



Bibliography

[1] Merino, L. y Santos, E.: Álgebra lineal con métodos elementales. *Thomson.* 2006.

[2] Palacios, M.: Enunciados de ejercicios de Matemáticas II, grado Ing. Tecn. Industr. http://pcmap.unizar.es/∼mpala. 2010

[3] Villa, A. de la: Problemas de Álgebra. *CLAGSA.* 1988.

[4] Arvesu, J.; Marcellán, F. y Sánchez J.: Problemas resueltos de Álgebra lineal. Paso a paso. *Thomson.* 2005.

[5] Rojo, J.: Álgebra lineal. *Vector Ediciones, Madrid.* 1989.

[6] Rojo, J. y Martín, I.: Ejercicios y problemas de Álgebra lineal. *Editorial AC, Madrid.* 1989

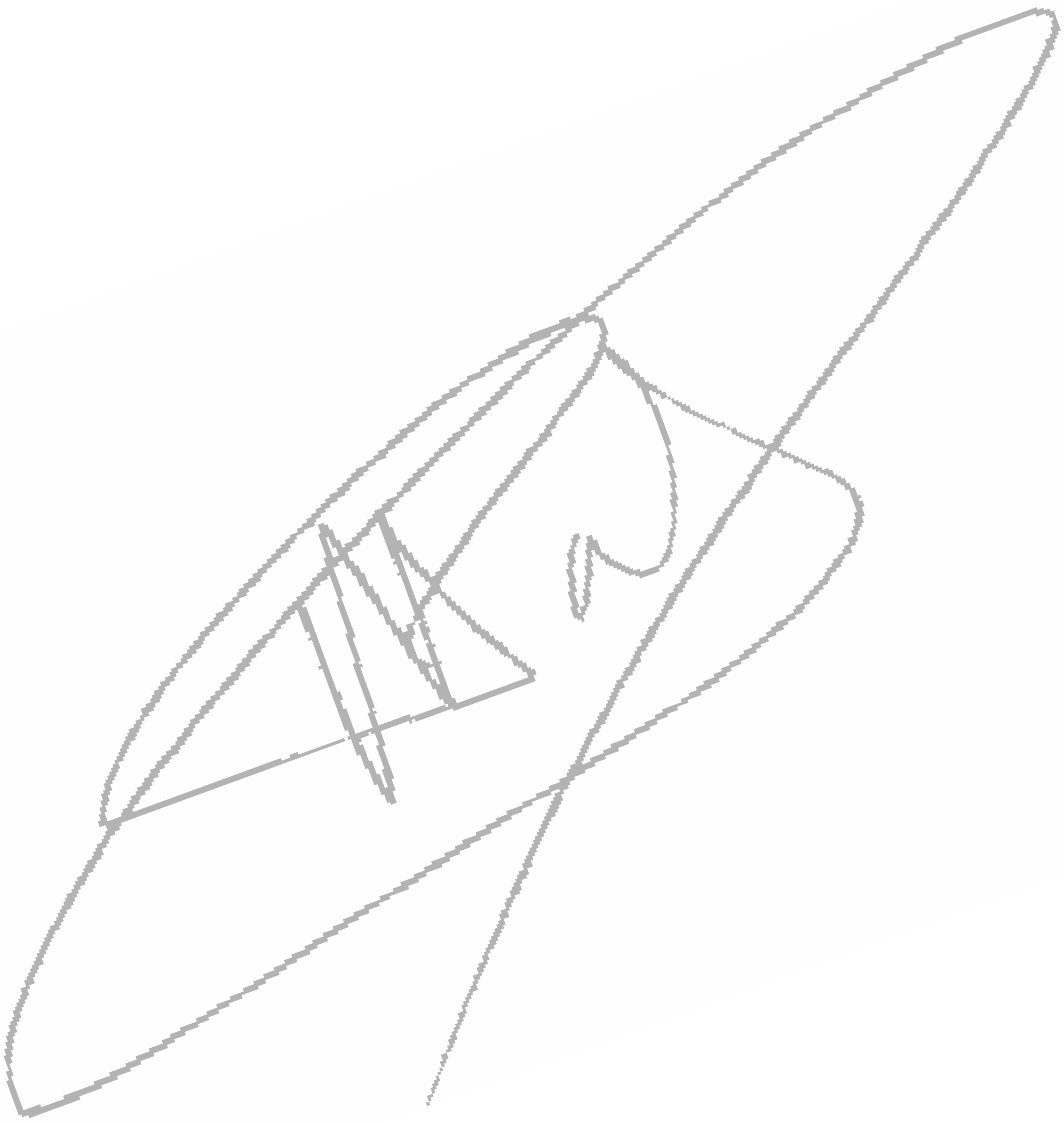
[7] Burgos, J. de: Álgebra lineal y geometría cartesiana. *McGraw-Hill.* 2000.

[8] Burgos, J. de: Álgebra lineal. *McGraw-Hill.* 1993.

[9] Diego, B. de et al. : Problemas de Álgebra lineal (2^a ed.). *Deimos.* 1986.

[10] Griffel, D. G.: Linear Algebra and its Applications. (Vol. 1 & 2) *Ellis Horwood.* 1989.

[11] Hernández, E.: Álgebra y geometría. *Addison-Wesley, Universidad Autónoma de Madrid.* 1994.



Chapter 5

Aplicaciones lineales

5.1 Definición y propiedades.

Definición 5.1.1 *Dados dos espacios vectoriales V y W sobre el mismo cuerpo K , se denomina aplicación lineal (u homomorfismo) de V en W a toda aplicación $f : V \longrightarrow W$ que verifique:*
i) $\forall v, w \in V : \quad f(v + w) = f(v) + f(w)$
ii) $\forall t \in K, \forall v \in V : \quad f(t\,v) = t\,f(v)$

Estas dos condiciones son equivalentes a la siguiente:

$$\forall t, s \in K, \forall v, w \in V : \quad f(t\,v + s\,w) = t\,f(v) + s\,f(w)$$

Al conjunto de todas las aplicación lineal (u homomorfismo) de V en W se le denomina Hom(V, W).

Si V coincide con W la aplicación lineal se denomina endomorfismo y el conjunto de todos los endomorfismos de V se denota por End (V).

Ejemplo 5.1.2 *La aplicación $f : V \longrightarrow V$ definida por f(x) = x es lineal y se le denomina homomorfismo unidad.*

Ejemplo 5.1.3 *La aplicación $f : V \longrightarrow V$ definida por f(x) = 0, $\forall v\ nV$, es lineal y se le denomina homomorfismo nulo.*

Ejemplo 5.1.4 *La aplicación $f : V \longrightarrow V$ definida por f(x) = t x, con $t \in K$ fijo, se le denomina homomorfismo escalar.*

Ejemplo 5.1.5 *La aplicación $f : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$, definida por f(p) = p' (polinomio derivada de p) es lineal.*

Se propone como ejercicio.

Propiedad 5.1.6 $\forall f \in Hom(V, W) : f(0_V) = 0_W$.

Dem.: $\forall v \in V, f(v) = f(v + 0_V) = f(v) + f(0_V) = f(v) + 0_W$,
por lo tanto, $f(0_V) = 0_W$. ■

Propiedad 5.1.7 $\forall v \in V: \quad f(-v) = -f(v)$.

Dem.: $f(0_V) = f(v + (-v)) = 0_W = f(v) + f(-v)$, por lo tanto, f(-v) = - f(v). ■

Propiedad 5.1.8 *Si U es un subespacio vectorial de W, entonces, $f^{-1}(U)$ es subespacio vectorial de V.*

Dem.: Sean $x, y \in f^{-1}(U) \Longrightarrow f(x), f(y) \in U$; por lo tanto, $\forall t, s \in K, f(t\,x + s\,y) = t\,f(x) + s\,f(y) \in U$, y por ser U subespacio $\Longrightarrow t\,x + s\,y \in f^{-1}(U)$. ■

Propiedad 5.1.9 *Si $\{a_1, ..., a_n\}$ es una familia ligada de V y $f \in Hom(V, W)$, entonces, la familia $\{f(a_1), ..., f(a_n)\}$ es una familia ligada de W.*

Dem.: Que la familia $\{a_1, ..., a_n\}$ es ligada $\Longrightarrow$ existen escalares $t_1, ..., tn \in K$, no todos nulos, tales que $t_1\,a_1 + ... + t_n\,a_n = 0_V$; tomando su imagen por f,

$$f(t_1\,a_1 + ... + t_n\,a_n) = t_1\,f(a_1) + ... + t_n\,f(a_n) = 0_W (prop. 5.1.6)$$

con algún coeficiente no nulo, por lo tanto, la familia $\{f(a_1), ..., f(a_n)\}$ es ligada. ■

Propiedad 5.1.10 *La composición de aplicaciones lineales es otra aplicación lineal*

Dem.: Sea $h = gof$. Se cumple:

$$h(t\,x + t'\,x') = gof(t\,x + t'\,x') = g(f(t\,x + t'\,x')) = g(t\,f(x) + t'\,f(x')) =$$

$$= t\,g(f(x) + t'\,g(f(x')) = t\,h(x) + t'\,h(x')$$

Definición 5.1.11 *Las aplicaciones lineales inyectivas se denominan monomorfismos.*
Las aplicaciones lineales suprayectivas se denominan epimorfismos.
Las aplicaciones lineales biyectivas se denominan isomorfismos

Definición 5.1.12 *Dada $f \in Hom(V, W)$, se denomina núcleo de f al subconjunto de V cuya imagen es el 0_W, y se representa por ker f, es decir, ker $f = \{v \in V | f(v) = 0_W\}$.*
Se denomina imagen de f, y se representa por Im f, al conjunto f(V).

Propiedad 5.1.13 *Ker f es un subespacio vectorial de V e Im f lo es de W.*

Comprúebese.

Definición 5.1.14 *Se denomina rango de una aplicación lineal f a la dimensión del subespacio imagen de f, es decir, rg f = dim (Im f). (En ocasiones se emplea también la palabra rango para designar al conjunto imagen Im f).*

Propiedad 5.1.15 *Una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales es un monomorfismo si y solo si su núcleo es el vector nulo.*

Dem.: : Sea $f \in Hom(V, W)$,
($\Rightarrow$) Supongamos que ker $f \neq \{0_V\}$; entonces, existe $v \neq 0_V$ tal que $v \in ker f \Rightarrow f(v) = 0_W = f(0_V) \Rightarrow$ (por ser f inyectiva, por hipótesis) $v = 0_V$, por lo tanto, ker $f = \{0_V\}$.
($\Leftarrow$) Hipótesis, ker $f = \{0_V\}$. Sean $v, w \in V$ tales que $f(v) = f(w) \Rightarrow f(v) - f(w) = 0_W = f(v - w) \Rightarrow v - w \in ker f \Rightarrow v = w$, luego, f inyectiva. ■

Así como la imagen de una familia ligada de vectores es siempre otra familia ligada, no ocurre lo mismo con familias libres, como probamos en el siguiente resultado.

Propiedad 5.1.16 *Si $f \in Hom(V,W)$, la imagen de toda familia libre de vectores de V es una familia libre de W si y solamente si f es monomorfismo.*

Dem.: ($\Rightarrow$) Hipótesis, $\{a_1,...,a_n\}$ libre $\Rightarrow$ $\{f(a_1),...,f(a_n)\}$ libre. La familia compuesta por un vector $v \in V, v \neq 0$ es una familia libre $\Rightarrow$ (por hipótesis) f(v) es familia libre $\Rightarrow f(v) \neq 0_W \Rightarrow v \in ker f \Leftrightarrow ker f = 0_V \Leftrightarrow$ f es monomorfismo.

($\Leftarrow$) Sea f inyectiva y $\{a_1,...,a_n\}$ una familia libre de vectores de V. Sea $\{f(a_1),...,f(a_n)\}$ la familia de sus imágenes por f. Veamos si ésta es libre o no. Tomemos una combinación lineal nula

$$t_1\, f(a_1) + ... + t_n\, f(a_n) = 0_W = f(t_1\, a_1 + ... + t_n\, a_n) \Rightarrow t_1\, a_1 + ... + t_n\, a_n \in ker f,$$

pero, como ker f = 0 por ser f monomorfismo, resulta que $t_1\, a_1 + ... + t_n\, a_n = 0$ y como, además, $\{a_1,...,a_n\}$ es una familia libre, $t_1 = ...t_n = 0_K$, por lo que, finalmente, la familia $\{f(a_1),...,f(a_n)\}$ es libre. ■

5.2 Determinación de una aplicación lineal.

Toda aplicación entre dos espacios vectoriales V y W sobre el mismo cuerpo K puede definirse en función de una base de V y una familia de vectores de W en la forma que se indica en el teorema siguiente.

Teorema 5.2.1 *Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K. Dada una base $\{a_i, i = 1,...,n\}$ de V y una familia $\{b_i, i = 1,...,n\}$ de vectores cualesquiera de W, existe una única aplicación lineal*

$$f : V \longrightarrow W \quad \text{tal que} \quad f(a_i) = b_i, \quad i = 1,...,n$$

Dem.: Basta definir la imagen de un vector cualquiera $v \in V$ en la forma siguiente:

$$v = v^1\, a_1 + ... + v^n\, a_n, \qquad f(v) = v^1\, f(a_1) + ... + v^n\, f(a_n = v^1\, b_1 + ... + v^n\, b_n$$

Evidentemente, esta aplicación es lineal y es única. ■

Observemos que la aplicación lineal así construida verifica la siguiente propiedad:

Teorema 5.2.2 *a) f monomorfismo $\Longleftrightarrow \{b_i, \quad i = 1,...,n\}$ es libre*
b) f epimorfismo $\Longleftrightarrow \{b_i, \quad i = 1,...,n\}$ es sistema generador de $W = Im\, f$
c) f isomorfismo $\Longleftrightarrow \{b_i, \quad i = 1,...,n\}$ es base de W

Ejercicio 5.2.3 *Encontrar una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que su imagen esté engendrada por los vectores (1,2,0,-4) y (2,0,-4,-3).*
Determinar otra aplicación lineal $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuyo núcleo esté engendrado por los vectores (1,2,3,4) y (0,1,1,1).

5.3 Aplicaciones lineales y dimensiones.

Veremos en este párrafo cómo están relacionadas las dimensiones de los espacios vectoriales entre los que hay definida una aplicación lineal. Denotaremos por $\{e_i, i = 1, ..., n\}$ la base canónica del espacio vectorial K^n.

Teorema 5.3.1 *Un espacio vectorial V sobre K es de dimensión finita n si y solo si V y Kn son isomorfos. Este isomorfismo queda determinado si se fija una base de V.*

Dem.: ($\Rightarrow$) Si V es de dimensión finita n , sea $\{a_i, i = 1, ..., n\}$ una base de V, por el teorema 5.2.1 existe un única aplicación lineal $f : K^n \longrightarrow V$ tal que $f(e_i) = a_i, i = 1, 2, ..., n$. Dicha aplicación asocia al vector $x = \sum_{i=1}^n x_i\, e_i \in K^n$, el vector $f(x) = y = \sum_{i=1}^n x_i\, a_i$. Evidentemente, esta aplicación es biyectiva y, por tanto, isomorfismo.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que existe un isomorfismo f entre K^n y V, y $\{e_i, i = 1, ..., n\}$ base de K^n , tal que $f(e_i) = a_i, i = 1, 2, ..., n$ (a_i arbitrarios, en principio). Por ser f isomorfismo es monomorfismo, por lo tanto, la imagen de la familia libre $f(e_i) = a_i, i = 1, 2, ..., n$ es otra familia libre de V; además, también es epimorfismo, por lo que la imagen de la familia generadora $f(e_i) = a_i, i = 1, 2, ..., n$ es también generadora; en consecuencia, la familia $f(e_i) = a_i, i = 1, 2, ..., n$ es libre y generadora de V, luego una base; así que dim V = n. ■

Consecuencia 5.3.2 *Dos espacios vectoriales V y W sobre el mismo cuerpo K, de tipo finito, son isomorfos si y solo si dim V = dim W.*

Teorema 5.3.3 *Sea V de dimensión finita n y sea f una aplicación lineal entre V y W. Entonces, se verifica:*

$$\textit{dim ker } f = \textit{dim } V \text{ - } \textit{dim Im } f$$

Dem.: Como ker f es un subespacio de V, dim ker f = r $\leq$ n. Consideremos una base $\{e_i, i = 1, ..., r\}$ de ker f y ampliémosla (teorema de la base incompleta) hasta formar una base $\{e_i, i = 1, ..., n\}$ de V. Como f es lineal, la familia $\{f(e_1), ..., f(e_r), f(e_{r+1}), ..., f(e_n)\}$ constituye un sistema generador de Im f (= f(V)); pero $f(e_1) = 0, ..., f(e_r) = 0$, luego la familia $\{f(e_{r+1}), ..., f(e_n)\}$ también engendra a Im f. Veamos que esta familia además es libre; en efecto,

$$\sum_{i=r+1} t_i\, f(e_i) = 0 \Longrightarrow f(\sum_{i=r+1} t_i\, e_i) = 0$$

es decir, el vector $x = \sum_{i=r+1}^n t_i\, e_i \in$ ker f , pero a su vez pertenece al complementario de ker f, por lo que ha de ser $x = 0$, y como los $e_{r+1}, ..., e_n$ son linealmente independientes, sus respectivos coeficientes deben anularse. ■

Ejercicio 5.3.4 *Hallar bases y dimensiones de ker f e Im f, siendo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y, z) = (y, -y, x + 2z)$.*

Solución: $\boxed{\text{ker f}}$ ker f = $\mathrm{f}^{-1}(0)$, es decir,

$$y = 0, \quad -y = 0, \quad x + 2z = 0 \Leftrightarrow \text{ ker f } =< (-2, 0, 1) >\Rightarrow \text{ dim ker f } = 1$$

$\boxed{\text{Im f}}$ Si $\{e_1, e_2, e_3$ es la base canónica:

$$\text{Im f } =< f(e_1), f(e_2), f(e_3) >=< (0, 0, 1), (1, -1, 0), (0, 0, 2) >=< (0, 0, 1), (1, -1, 0) >,$$

luego: dim Im f = 2; y se cumple: dim Im f + dim ker f = 2 + 1 = 3 = dim $\mathbb{R}^3$. ■

5.4 Expresión coordenada de un aplicación lineal. Cambio de base.

Sean $f \in Hom(V, W)$, $\mathrm{B}_v = \{v_i, i = 1, ..., n\}$ una base de V y $\mathrm{B}_w = \{w_j, j = 1, ..., p\}$ una base de W. Sean los vectores $\{b_i, i = 1, ..., n\}$ imágenes de los a_i mediante f. Sean X e Y las matrices columna coordenadas de los vectores x e y = f(x) respecto de las bases B_v y B_w, respectivamente.

Utilizando matrices se puede escribir:

$$x = x^1\, v_1 + ... + x^n\, v_n = [v_1\, v_2\, ...v_n]\, X, \quad y = y^1\, w_1 + ... + y^p\, w_p = [w_1\, w_2\, ...w_p]\, Y, \tag{5.1}$$

$$b_i = b_i^1\, w_1 + ... + b_i^p\, w_p = [w_1\, w_2\, ...w_p]\, B_i, \quad i = 1, 2, ..., n \tag{5.2}$$

donde B_i es la matriz columna coordenada del vector b_i respecto de la base B_w.

Por ser aplicación lineal, la imagen de x mediante f, se puede escribir:

$$y = f(x) = f(x^1\, v_1 + ... + x^n\, v_n) = x^1\, f(v_1) + ... + x^n\, f(v_n) = x^1\, b_1 + ... + x^n\, b_n = [b_1\, b_2\, ...b_n]\, X \tag{5.3}$$

Sustituyendo las (5.2) en las (5.3) e identificando con las (5.1), resulta:

$$[w_1\, w_2\, ...w_p]\, Y = [w_1\, w_2\, ...w_p]\, [b_1\, b_2\, ...b_n]\, X$$

Ahora bien, como las coordenadas de un vector en una base son únicas, se debe verificar que

$$Y = [b_1\, b_2\, ...b_n]\, X \tag{5.4}$$

Definición 5.4.1 *La matriz*

$$B = [b_1\, b_2\, ...b_n]$$

que tiene por columnas las coordenadas de las imágenes de los vectores de la base B_v respecto de la base B_w se le denomina matriz coordenada de f respecto de las bases B_v y B_w

Nótese que la matriz B anterior tiene tantas columnas como la dimensión de V y tantas filas como la dimensión de W, es decir, $B \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(p, n)$.

Definición 5.4.2 *A la ecuación (5.4) se le denomina expresión o ecuación matricial de f respecto de las bases B_v y B_w*

La relación anterior define las coordenadas en la base B_w del vector y (imagen del x mediante f) en términos de las coordenadas del vector x referidas a la base B_v, por ello también se denominan ecuaciones de f en coordenadas x e y.

Propiedad 5.4.3 *La matriz coordenada de la composición de aplicaciones lineales es el producto de las correspondientes matrices*

Dem.: Fijadas bases:

$$f : V \longrightarrow W, \quad Y = A\, X$$

$$g : W \longrightarrow U, \quad Z = B\, Y$$

$$h = gof : V \longrightarrow U, \quad Z = C\, X$$

Sustituyendo la primera en la segunda resulta: $Z = B\, A\, X$. Luego, como la matriz coordenada de una aplicación lineal es única, debe ser

$$C = B\, A \qquad \blacksquare$$

Propiedad 5.4.4 *La matriz coordenada del cambio de la base B a la B' puede ser interpretada como la matriz de la aplicación identidad respecto de la base B' y B*

Dem.: Basta tener en cuenta que la ecuación de tal cambio de coordenadas de B a B' es $X = P\,X'$ e identificarla con la ecuación de la aplicación identidad respecto de las bases B' y B. Observar el cambio de orden en las bases. ∎

En consecuencia, si la matriz coordenada de la aplicación f respecto de las bases B_v y B_w es A y su ecuación matricial es $Y = A\,X$, considerando el cambio a las nuevas bases $\tilde{B}_v$ y $\tilde{B}_w$ y sus ecuaciones: $X = P\,\tilde{X}$, $Y = Q\,\tilde{Y}$, resulta:

$$Q\,\tilde{Y} = A\,P\,\tilde{X}, \text{es decir, } \tilde{Y} = B\,\tilde{X}, \text{ siendo } B = Q^{-1}\,A\,P$$

la matriz de f en las nuevas bases.

Nótese que, fijadas bases, se pueden identificar la aplicación lineal y su matriz coordenada. Por lo tanto, la matriz B anterior se puede interpretar como la asociada a la composición del esquema siguiente:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ x & \longrightarrow & f(x) \\ (V, B_v) & \xrightarrow{A} & (W, B_w) \\ \Big\uparrow Q & & \Big\uparrow P \\ (V, \tilde{B}_v) & \xrightarrow{B} & (W, \tilde{B}_w) \end{array} \qquad \begin{array}{c} V \neq W \text{ no endomorfismo} \\ B = P^{-1}\,A\,Q \\ \text{equivalencia} \\ \\ V = W \text{ endomorfismo, } Q = P \\ B = P^{-1}\,A\,P \\ \text{semejanza} \end{array} \qquad (5.5)$$

Ejercicio 5.4.5 *Sea la aplicación* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida por f(x,y,z) = (x - 2z, y + z). Se pide: i) ¿es f lineal?; ii) ¿cuáles son las ecuaciones de f en las bases canónicas?; iii) ¿cuáles son las ecuaciones de f en las bases (1,1,1),(2,2,0),(3,0,0) y (2,1),(1,2), respectivamente?; iv) hallar ker f, Im f y una base de cada uno de ellos; v) hallar* f^{-1}*(1,1).*

Solución: i) Cada de las componentes de f(x, y, z) está definida mediante una expresión lineal y homogénea, luego es lineal. También se puede aplicar la definición para probarlo.

ii) La matriz coordenada en las bases canónicas tiene por columnas las coordenadas de las imágenes de los vectores de una base respecto de la otra (5.4.1). Así que:

$$f(1,0,0) = (1,0);\ f(0,1,0) = (0,1),\ f(0,0,1) = (-2,1) \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, Y = B\,X$$

iii) Ahora hay que calcular coordenadas de las imágenes de los vectores $\tilde{X}_n$ de la nueva base y expresarlas, $\tilde{Y}_n$, en la base nueva de $\mathbb{R}^2$. Si Q es la matriz del cambio de la antigua a la nueva base:

$$f(1,1,1) = (-1,2)_{can} \rightarrow \text{(cambio de coord.)}\ \tilde{Y}_n^1 = Q^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$f(2,2,0) = (2,2)_{can} \rightarrow \text{(cambio de coord.)}\ \tilde{Y}_n^2 = Q^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$f(3,0,0) = (3,0)_{can} \rightarrow \text{(cambio de coord.)}\, \tilde{Y}_n^3 = Q^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz coordenada C de f en las nuevas bases será:

$$C = \begin{bmatrix} \tilde{Y}_n^1 \, \tilde{Y}_n^2 \, \tilde{Y}_n^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 & 2/3 & 2 \\ 5/3 & 2/3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{Y} = C\,\tilde{X}$$

También se cumple: $C = Q^{-1}\,B\,P$ (según (5.5)).

iv) ker f $= f^{-1}(0_{\mathbb{R}^2}) = \{(x,y,z) | x - 2z = 0, y + z = 0\} =$

$$= \{t\,(2,-1,1) | t \in \mathbb{R}\} = <(2,-1,1)>$$

Im f $= < f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1) > = < (1,0), (0,1), (-2,1) > = < (1,0), (0,1) > = \mathbb{R}^2$

v) $f^{-1}(1,1) = \{X | B\,X = (1,1)\} = \{(1,1,0) + \lambda\,(2,-1,1)\}$. ■

Ejercicio 5.4.6 *Dada la aplicación lineal* $f : \mathcal{M}_{\mathrm{R}}(2) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *definida por*

$$f(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = (a+b-c, a+b+d, b+c+d)$$

se pide: i) obtener las ecuaciones de f en las bases

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ de } \mathcal{M}_{\mathrm{R}}(2) \text{ y } \{(0,2,1), (2,0,1), (0,1,1)\} \text{ de } \mathbb{R}^3;$$

ii) obtener la imagen de la matriz $M = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Solución: i) Según el esquema (5.5), hace falta conocer la matriz A de f respecto de las bases canónicas; para ello hay que encontrar las imágenes de la base canónica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ que son:

$$f(e_1) = (1,1,0), f(e_2) = (1,1,1), f(e_3) = (-1,0,1), f(e_4) = (0,1,1)$$

por lo que la matriz A coordenada en las bases canónicas será:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

En consecuencia, la matriz respecto de las bases dadas será:

$$B = Q^{-1}\,A\,P = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & -1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

siendo P y Q las matrices que definen los cambios de base en el espacio inicial y final, respectivamente, es decir:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad ■$$

5.5 Equivalencia y semejanza de matrices.

Como hemos visto, al realizar un cambio de bases en el espacio inicial y en el final, las matrices coordenadas de una aplicación están relacionadas por la igualdad (5.5). Se presenta ahora de manera natural la siguiente

Definición 5.5.1 *Dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(p,n)$ se dicen equivalentes, y se escribirá $A \sim B$, si existen matrices regulares P y Q tales que:*

$$A \sim B \Longleftrightarrow B = Q^{-1}\, A\, P$$

Es decir, matrices equivalentes son todas las asociadas a una misma aplicación lineal en todos los pares de bases posibles. Como la equivalencia de matrices es una relación de equivalencia, cada aplicación lineal define una de esas clases. El representante más simple de una clase es la matriz que aparece en el siguiente

Teorema 5.5.2 *Si rg $f = r \leq n$, entonces su matriz A coordenada en cualquier base es equivalente a la siguiente:*

$$A \sim \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(p,n)$$

Dem.: Es suficiente escoger bases del espacio inicial V y final W adecuadas. Para ello, tomamos una base $\{e_{r+1}, ..., e_n\}$ del ker f. Acontinuación, la ampliamos hasta conseguir una base de V, $\{e_1, ..., e_r, e_{r+1}, ..., e_n\}$. La familia $\{a_1, ..., a_r\} = \{f(e_1), ..., f(e_r)\}$ es una base de Im f. Ampliémosla hasta conseguir una base de W, $\{a_1, ..., a_p\}$. Observamos que la matriz coordenada de f en las bases construidas es la deseada. ■

Ejercicio 5.5.3 *Sea $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $g(x, y, z, t) = (x - y + z, y + z - t, x + 2z - t)$*

a) Calcular la matriz coordenada de g en bases canónicas de ambos espacios.

b) Demostrar que $\ker g$ tiene dimensión 2.

c) Calcular una base de $\ker g$. Llamar a sus elementos a_3, a_4.

d) Dar dos vectores de $\mathbb{R}^4$ (a_1 y a_2) de forma que a_1, a_2, a_3, a_4 sea base de $\mathbb{R}^4$

e) ¿Por qué se puede afirmar que $b_1 = g(a_1)$ y $b_2 = g(a_2)$ constituyen una base de $Im(g)$?

f) Dar un tercer vector b_3 de forma que $\{b_1,\ b_2,\ b_3\}$ sea una base de $\mathbb{R}^3$.

g) Sin realizar ningún cálculo adicional, escribir la matriz de g en las bases $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ de $\mathbb{R}^4$ y $\{b_1, b_2, b_3\}$ de $\mathbb{R}^3$. en el apartado anterior.

Ejercicio 5.5.4 *Sea $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ dada por:*

$$f(p(x)) = \int_0^x p(t)\, dt + p'(x)$$

a) Hallar la matriz coordenada A de f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathbb{R}_3[x]$.

b) Matriz coordenada B de f respecto de las bases $\{1, 2x, 3x^2\}$ y $\{1, x+1, x^2+2, x^3+3\}$

c) Hallar dos matrices regulares P y Q tale s que $B = P\ A\ Q$.

Semejanza de matrices

Si se consideran endomorfismos, es decir, $f \in EndV$, parece natural utilizar la misma base en el espacio inicial y final. Se presenta así la definición siguiente, que es un caso muy particular de equivalencia.

Definición 5.5.5 *Dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{\mathrm{R}}(n)$ se dicen semejantes, y se escribe $A \sim B$, si existe una matriz regular P tal que:*

$$A \sim B \Longleftrightarrow B = P^{-1}\, A\, P$$

Es decir, ya que la relación anterior es la de las matrices asociadas a un mismo endomorfismo, matrices semejantes son todas las asociadas a un mismo endomorfismo en todas las bases posibles. Como la semejanza de matrices también es una relación de equivalencia, cada endomorfismo define una de esas clases.

¿Cuál es ahora la matriz más simple de una clase de semejanza?. Veremos la respuesta en el capítulo siguiente.

De momento tenemos una regla para relacionar matrices equivalentes, ($f : V \longrightarrow W$) y otra para matrices semejantes, ($f \in EndV$),

$$\begin{array}{ccc}
V & \xrightarrow{f} & W \\
x & \longrightarrow & f(x) \\
(V, B_v) & \xrightarrow{A} & (W, B_w) \\
\uparrow Q & & \uparrow P \\
(V, \tilde{B}_v) & \xrightarrow{B} & (W, \tilde{B}_w)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
V \neq W \text{ no endomorfismo} \\
B = P^{-1}\, A\, Q \\
\text{equivalencia} \\
\\
V = W \text{ endomorfismo} \\
B = P^{-1}\, A\, P \\
\text{semejanza}
\end{array}
\tag{5.6}$$

Ejercicio 5.5.6 *Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido por:*

$$f(2,1,0) = (1,-1,2), \quad f(0,1,2) = (0,2,1), \quad f(1,0,1) = (1,1,3)$$

Se pide:
a) Bases de Im f y Ker f.
b) Matriz coordenada A de f respecto de la base $\{(2,1,0),(0,1,2),(1,0,1)\}$.
c) Matriz coordenada B de f respecto de la base canónica.
d) Hallar una matriz P tal que $A = PBP^{-1}$.

5.6 Ejercicios para resolver

Ejercicios de [1] (Merino) números 33, 34, 37, 38, 40, 112, 43, 103

Ejercicios de [3] (de la Villa) capítulo 2, números 3, 9, 17

Ejercicios de las hojas de enunciados de [2] (Palacios).