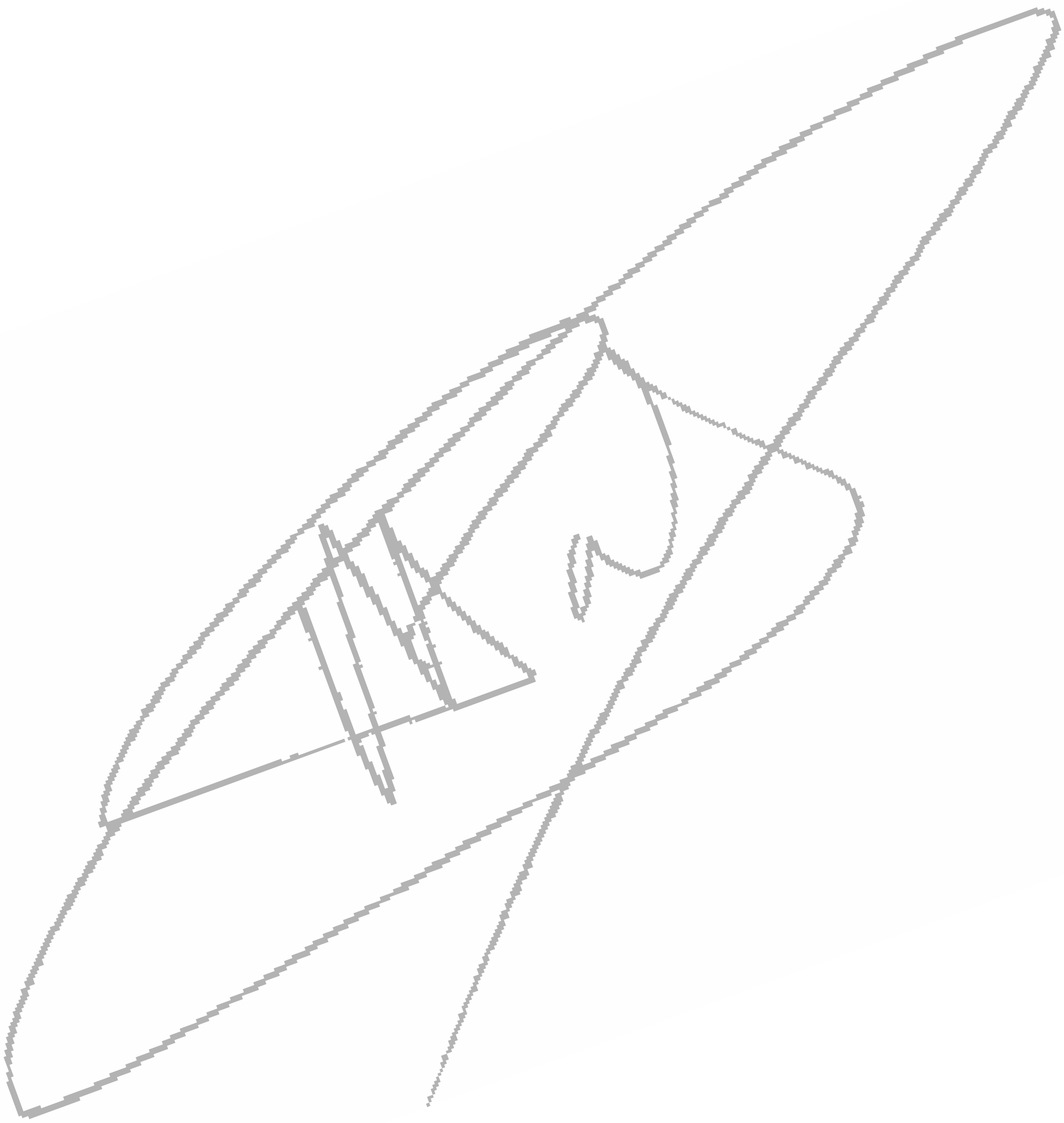
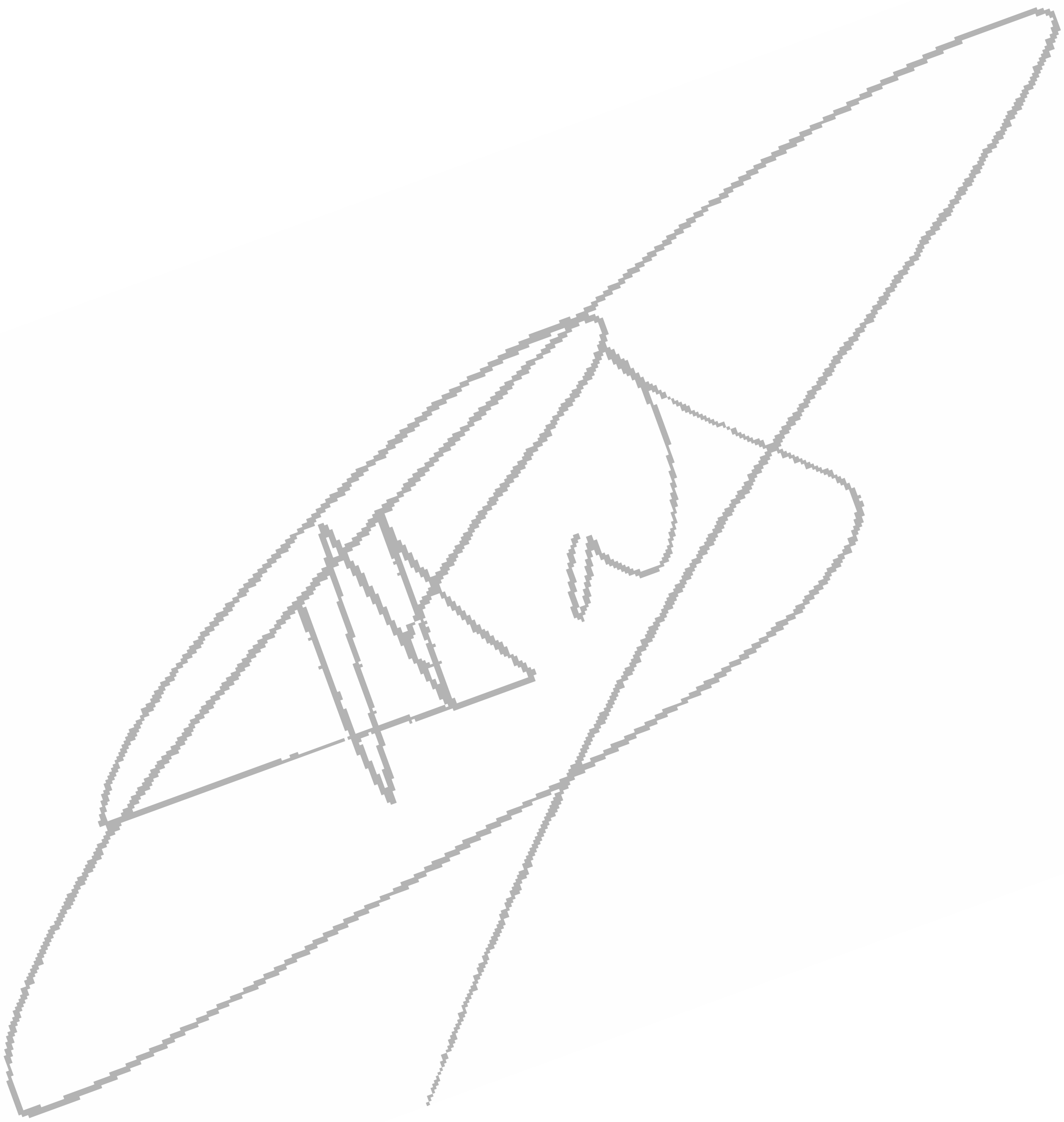
4. Espacios vectoriales

Manuel Palacios
Departamento de Matemática Aplicada
Centro Politécnico Superior
Universidad de Zaragoza



Contents



Bibliography

[1] Merino, L. y Santos, E.: Álgebra lineal con métodos elementales. *Thomson.* 2006.

[2] Palacios, M.: Enunciados de ejercicios de Matemáticas II, grado Ing. Tecn. Industr. http://pcmap.unizar.es/∼mpala. 2010

[3] Villa, A. de la: Problemas de Álgebra. *CLAGSA.* 1988.

[4] Arvesu, J.; Marcellán, F. y Sánchez J.: Problemas resueltos de Álgebra lineal. Paso a paso. *Thomson.* 2005.

[5] Rojo, J.: Álgebra lineal. *Vector Ediciones, Madrid.* 1989.

[6] Rojo, J. y Martín, I.: Ejercicios y problemas de Álgebra lineal. *Editorial AC, Madrid.* 1989

[7] Burgos, J. de: Álgebra lineal y geometría cartesiana. *McGraw-Hill.* 2000.

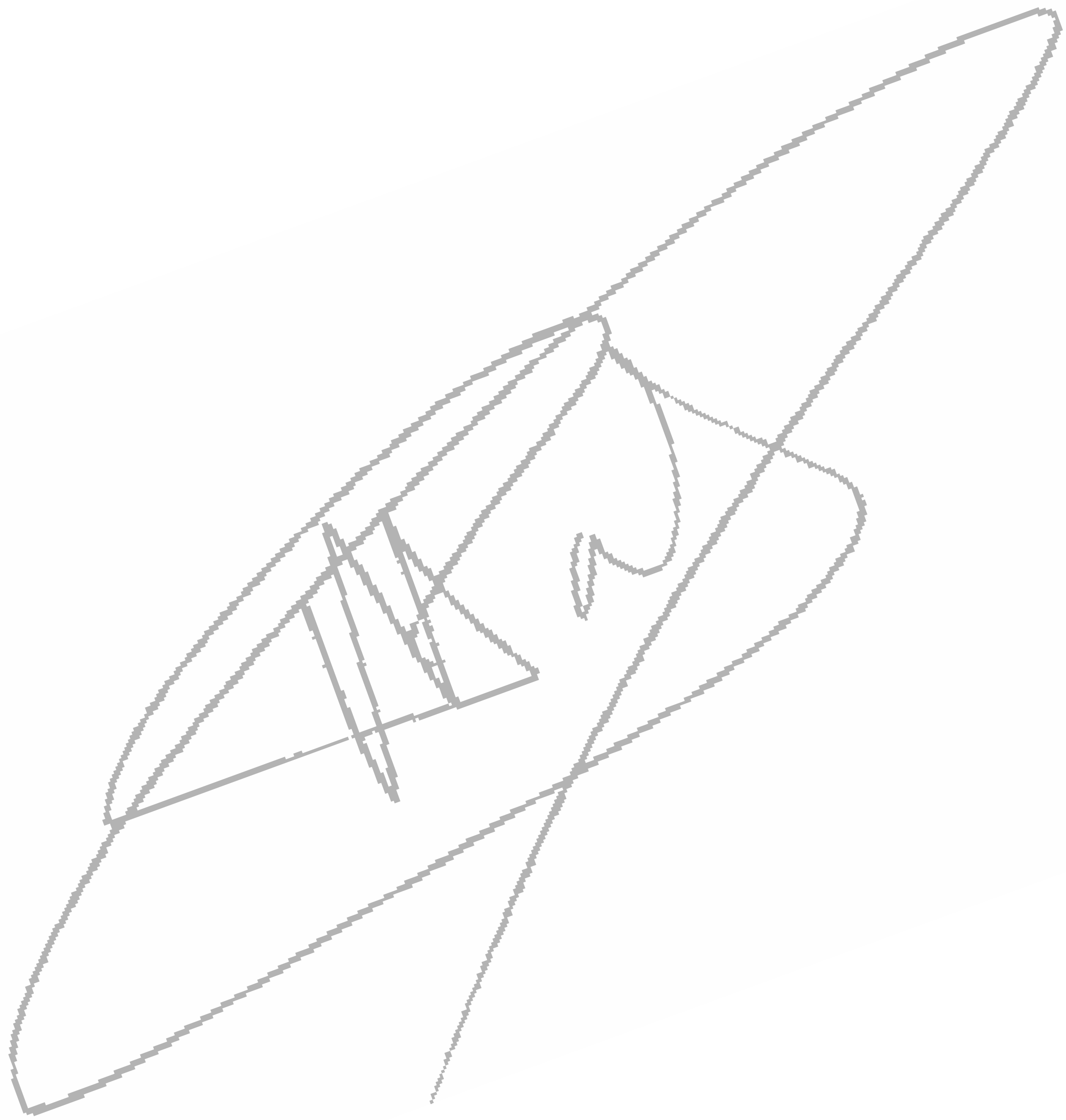
[8] Burgos, J. de: Álgebra lineal. *McGraw-Hill.* 1993.

[9] Diego, B. de et al. : Problemas de Álgebra lineal (2^a ed.). *Deimos.* 1986.

[10] Griffel, D. G.: Linear Algebra and its Applications. (Vol. 1 & 2) *Ellis Horwood.* 1989.

[11] Hernández, E.: Álgebra y geometría. *Addison-Wesley, Universidad Autónoma de Madrid.* 1994.

[12] Díaz, A.; Hernández, E. y Tejero, L.: Álgebra para ingenieros. *Sanz y Torres, UNED.* 2010.



Chapter 4

Espacios vectoriales

4.1 Vectores libres del espacio ordinario.

Introduciremos el concepto de vector a partir de la idea de vector libre del espacio ordinario.

Definición 4.1.1 *Llamamos vector fijo AB de origen A y extremo B al segmento ordenado AB (AB $\neq$ BA).*

Llamemos F al conjunto de todos los vectores fijos del espacio ordinario. En F podemos definir la relación de equivalencia $\equiv$ siguiente

Definición 4.1.2 *Dos vectores fijos son equipolentes, y escribiremos AB $\equiv$ A'B' , si el polígono ABB'A' es un paralelogramo.*

Se prueba inmediatamente que la relación $\equiv$ es de equivalencia y, por lo tanto, clasifica a F en clases disjuntas y no vacías.

Definición 4.1.3 *Llamamos vector libre del espacio ordinario a cada una de las clases de equipolencia de vectores fijos de dicho espacio, es decir, a cada elemento del conjunto cociente $F/\equiv$.*

Sabemos que para cada punto O del espacio ordinario y cada vector libre a existe un único vector fijo con origen en O que pertenece a la clase a ; por lo tanto, podemos decir que el conjunto de vectores fijos con origen en un punto O es un sistema completo de representantes de $F/\equiv$. En consecuencia, podemos definir las dos operaciones siguientes

Definición 4.1.4 *Llamaremos suma de vectores libres a y b de $F/\equiv$ al vector libre, que denotaremos a + b , definido de la manera siguiente: si AB $\in$ a, tomemos un representante de b con origen en B, sea BC; el vector fijo AC define una clase de equipolencia, el vector libre a + b.*

Este vector libre está bien definido porque cada clase de equipolencia tiene un único representante con origen en A.

También podemos escribir:

AB $\equiv$ A'B' y BC $\equiv$ B'C' $\Rightarrow$ AC $\equiv$ A'C'

(que suele denominarse teorema restringido de Desargues) y representa el hecho de que $\equiv$ es relación de equivalencia compatible con la suma de F.

Teorema 4.1.5 *El conjunto de los vectores libres del espacio ordinario tiene estructura de grupo abeliano con respecto a la operación suma anterior.*

La relación de equipolencia $\equiv$ también es compatible con la operación producto de un vector fijo por un escalar (número real), es decir, AB $\equiv$ A'B' $\Rightarrow$ t AB $\equiv$ t A'B', por lo que podemos definir la operacción externa siguiente

Definición 4.1.6 *Llamaremos producto de un número real t por un vector libre a al vector libre t a definido por t a = [t AB]*

Notemos que t AB es otro vector fijo de la misma dirección, mismo origen, longitud t veces la longitud de AB y sentido el mismo o contrario que AB según que t sea positivo o negativo.

Teorema 4.1.7 *$F/\equiv$ verifica con respecto a las operaciones anteriores las siguientes propiedades: 5) t(a+b) = ta + tb, $\forall t, s \in \mathbb{R}, \forall a, b \in F/\equiv$ 6) (t+s) a = ta + sa, $\forall t, s \in \mathbb{R}, \forall a \in F/\equiv$ 7) t(s a) = (ts) a, $\forall t, s \in \mathbb{R}, \forall a \in F/\equiv$ 8) 1 a = a, $\forall a \in F/\equiv$*

Demostr.: Inmediata.

4.2 Espacio vectorial: definición, propiedades.

Como abstracción de la estructura que posee el conjunto de los vectores libres del espacio ordinario con respecto a la suma de vectores libres y el producto de vectores por números reales, llegamos al concepto de espacio vectorial. Como consecuencia, la nomenclatura utilizada a partir de ahora coincidirá con la de los vectores libres.

En adelante, consideraremos un cuerpo conmutativo K, cuyos elementos (que llamaremos escalares) denotaremos por las letras t,s,r o bien x_i, y_i, z_i, etc.

Definición 4.2.1 *Llamaremos espacio vectorial sobre el cuerpo K a un conjunto V dotado de una operación interna (+) y una operación externa () con operadores en K respecto de las cuales verifica las siguientes propiedades:*
1) prop. asociativa: a+(b+c) = (a+b)+c, $\forall a, b, c \in V$
2) existencia elemento nulo: existe $0 \in V$, tal que $0 + a = a + 0 = a, \forall a \in V$
3) existencia elem. opuesto: $\forall a \in V$, existe $-a \in V$ tal que $-a + a = a + (-a) = 0$
4) prop. conmutativa: a+b = b+a , $\forall a, b \in V$
5) t(a+b) = ta + tb, $\forall t, s \in K, \forall a, b \in V$
6) (t+s) a = ta + sa, $\forall t, s \in K, \forall a \in V$
7) t(s a) = (ts) a, $\forall t, s \in K, \forall a \in V$
8) 1_K a = a , $\forall a \in V$ (1_K es el elemento unidad de K)

Observemos que V con respecto a + tiene estructura de grupo abeliano y, en consecuencia, todo lo dicho para grupos es válido sin modificación para espacios vectoriales. Si no hay confusión, denotaremos por 0 al elemento neutro de V y al de K, caso contrario, escribiremos 0_V y 0_K, respectivamente. Téngase cuidado en no confundir las operaciones de V con las de K.

Ejemplo 4.2.2 *El cuerpo K con la operación + considerada como interna y el producto . considerado como externa sobre el propio K como dominio de operadores.*

Ejemplo 4.2.3 *El conjunto V de las sucesiones f de elementos del cuerpo K,*

$$V = \{f : \mathbb{N} \longrightarrow K\},$$

dotado de las operaciones siguientes:
(+) (f+g)(n) = f(n) + g(n)
(·) (t · f)(n) = t f(n)
es un espacio vectorial sobre K.

Ejemplo 4.2.4 *El conjunto K[x] de los polinomios en una indeterminada con coeficientes sobre el cuerpo K respecto de la suma de polinomios y el producto de un escalar por un polinomio.*

Ejemplo 4.2.5 *El producto cartesiano V de n espacios vectoriales,*

$$V = V_1 \times V_2 \times ... \times V_n = \{(a_1, ..., a_n)|a_i \in V_i, i = 1, 2, ..., n\}$$

con las operaciones siguientes:
(+) $(a_1, ..., a_n) + (b_1, ..., b_n) = (a_1 + b_1, ..., a_n + b_n)$
(·) $t\,(a_1, ..., a_n) = (t\,a_1, ..., t\,a_n)$, *t de un cuerpo K*
es espacio vectorial llamado espacio vectorial producto.

Consecuencia 4.2.6 $0_K a = 0_V, \forall a \in V$

Demostr.: (t+0) a = ta + 0a = ta $\Rightarrow 0_K a = 0_V$. ■

Consecuencia 4.2.7 $t\,0_V = 0_V, \forall t \in K$

Demostr.: $t(0 + a) = t\,0 + ta = ta, \Rightarrow t0_V = 0_V$. ■

Consecuencia 4.2.8 $t\,a = 0_V \Rightarrow t = 0_K$ *ó* $a = 0_V$

Demostr.: Supongamos que $t \neq 0 \Rightarrow t^{-1} \in K$, por lo que $t^{-1}(ta) = a = t^{-1}0_V = 0_V$. ■

Consecuencia 4.2.9 $(-t)a = -(ta) = t(-a), \forall a \in V, \forall t \in K$

Demostr.: Como t+(-t) = 0, se tiene: (t+(-t)) a = ta +(-t) a = 0V ⇒ (-t) a = -t a.
La otra relación se prueba análogamente. ■

Consecuencia 4.2.10 $t(a - b) = ta - tb, \forall a, b \in V, \forall t \in K$

Demostr.: t(a-b) = t(a+(-b)) = ta + t(-b) = ta - tb. ■

4.3 Subespacios vectoriales. Suma directa.

Definición 4.3.1 *Un subconjunto S no vacío de un espacio vectorial V sobre K se dice subespacio vectorial de V si posee estructura de espacio vectorial respecto a las dos operaciones de V.*

Teorema 4.3.2 *(de caracterización).- Sea* $S \neq \emptyset$ *y* $S \subset V$*, entonces, S es subespacio vectorial de* $V \Longleftrightarrow \forall a, b \in S, \forall t, s \in K : t\,a + s\,b \in S$.

Demostr.: [$\Rightarrow$] Si S es subespacio vectorial de V, S es estable respecto de $(\cdot)$ y respecto de $(+)$, luego: $\forall a, b \in S, \forall t, s \in K : ta + sb \in S$

[$\Leftarrow$] Tomando t=1 y s=-1, la hipótesis implica: $a - b \in S, \forall a, b \in S$, es decir S es subgrupo de V.

Tomando t=t y s=0, resulta $ta \in S$, es decir, S es estable respecto de la operación externa.

El resto de las propiedades se verifica trivialmente por ser $S \subset V$. ■

Ejemplo 4.3.3 *El conjunto $S = \{(0, a_2, ..., a_n) | a_i \in K, i = 2, ..., n\}$ es un subespacio vectorial de K^n.*

Ejemplo 4.3.4 *Sean $S_1, S_2, ..., S_n$ subespacios vectoriales de V; se define el subconjunto suma mediante: $S_1 + S_2 + ... + S_n = \{a \in V | a = a_1 + ... + a_n, a_i \in S_i, i = 1, 2, ..., n\}$ Pues bien, el subconjunto suma con respecto a la suma de n-tuplas y al producto por escalares del cuerpo K es un subespacio vectorial de V llamado subespacio vectorial suma.*

Se propone comprobarlo como ejercicio.

Ejemplo 4.3.5 *La intersección de n subespacios vectoriales de V también es subespacio vectorial de V.*

Probarlo como ejercicio.

Ejemplo 4.3.6 *Dados los espacios vectoriales $V_i, i = 1, 2, ..., n$, sean $S_i, i = 1, 2, ..., n$ subespacios vectoriales respectivos; el producto cartesiano de los $S_i, i = 1, 2, ..., n$ es un subespacio vectorial del producto cartesiano de los $V_i, i = 1, 2, ..., n$.*

Propiedad 4.3.7 *La suma $S_1 + S_2 + ... + S_n$ de subespacios es el menor subespacio que contiene a $S_i, i = 1, 2, ..., n$*

La intersección de subespacios es el mayor subespacio contenido en todos ellos.

Demostr.: i) Ya hemos visto que es subespacio vectorial.
ii) $S_1 \cup S_2 \cup ... \cup S_n \subset S_1 + S_2 + ... + S_n$. En efecto, notemos que los vectores de la forma $x = a_1 + 0 + ... + 0, ..., x = 0 + ... + 0 + a_n$, pertenecen a la suma, es decir, $S_j c S_1 + S_2 + ... + S_n$ $\Rightarrow S_1 \cup S_2 \cup ... \cup S_n \subset S_1 + S_2 + ... + S_n$.
iii) Sea S un subespacio que contiene a la unión, si $a_i \in S_i \Rightarrow a_1, a_2, .., a_n \in S$ y, por ser S subespacio, $a_1 + a_2 + .. + a_n \in S \Rightarrow S_1 + S_2 + ... + S_n \subset S$

Ejemplo 4.3.8 *Sean $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_1 = 0\}$ y $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_2 = 0\}$, entonces, $S_1 + S_2 = \mathbb{R}^3$, $S_1 \cup S_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_1 = 0, x_2 = 0\}$.*

Ejemplo 4.3.9 *Sea $S_1 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) | a_{11} + a_{22} = 0\}$ y $S_2 = \{B \in M_2(\mathbb{R}) | a_{12} + a_{21} = 0\}$, entonces $S_1 + S_2 = \{C \in M_2(\mathbb{R}) | C = A + B\} = M_2(\mathbb{R})$ $S_1 \cup S_2 = \{D \in M_2(\mathbb{R}) | a_{11} + a_{22} = 0$ y $a_{12} + a_{21} = 0\}$*

En general, hemos de tener en cuenta que la unión de subespacios no tiene por qué ser otro subespacio.

Definición 4.3.10 *La suma de n subespacios, $S_1 + S_2 + ... + S_n$, se dice suma directa y se escribe $S_1 \oplus S_2 \oplus ... \oplus S_n$, si cada elemento a de $S_1 + S_2 + ... + S_n$ admite una expresión única en la forma $a = a_1 + a_2 + .. + a_n$ con $a_i \in S_i, i = 1, 2, ..., n$*

Teorema 4.3.11 *Sean $S_1, S_2, ..., S_n$ subespacios vectoriales de V. Entonces son equivalentes las siguientes proposiciones:*
1) La suma de los subespacios es directa
2) Si $a_1 + a_2 + .. + a_n = 0$ con $a_i \in S_i, i = 1, 2, ..., n$, entonces, $a_i = 0, i = 1, 2, ..., n$
3) Para cada i= 1,2,...,n, tal que $S_i \cap S_i' \neq \emptyset$, se verifica: $S_i \cap S_i' = \{0\}$, siendo $S_i' = S_1 + S2_+ ... + S_{i-1} + S_{i+1} + ... + S_n, i = 1, 2, ..., n$

Demostr.: Supondremos que n = 2, el caso general es análogo.

[1) $\Rightarrow$ 3)] Supongamos que la suma es directa y que $S_1 \cap S_2 \neq \{0\}$. Entonces, sea $x \in S_1 \cap S_2, x \neq 0 \Rightarrow x \in S_1$ y $x \in S_2 \Rightarrow x = x + 0 \in S_1 + S_2 \quad x = 0 + x \in S_1 + S_2$ y, por ser la suma directa, resulta x = 0, en contra de la hipótesis.

[3)$\Rightarrow$1)] Supongamos que $S_1 \cap S_2 = \{0\}$ y que la suma no sea directa. Entonces, si $x \in S_1 + S_2$ se podrá escribir x = y + y' = z + z' con $y \neq z$ y $y' \neq z'$, de donde, restando, (y - z) + (z' - y') = 0 es decir, $0 \neq y - z = z' - y' \neq 0$, pero, $y - z \in S_1$ y $z' - y' \in S_2$, luego $y - z = z' - y' = 0 \in S_1 \cap S_2$, es decir, $y = z$ y $y' = z'$.

[1) $\Leftrightarrow$ 2)] se propone como ejercicio.■

Ejemplo 4.3.12 *Sea $V = \mathbb{R}^3$ y sean los siguientes subespacios de V:*

$S_1 = \{(0, x_2, x_3)|x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$, $S_2 = \{(x_1, 0, x_3)|x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$, $\quad S_3 = \{(x_1, 0, 0)|x_1 \in \mathbb{R}\}$

La suma $S_1 + S_3 = \{(x_1, x_2, x_3)|x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ es directa; sin embargo, las sumas $S_1 + S_2$, $\quad S_2 + S_3$ no son directas, puesto que $S_1 \cap S_1' = S_1 \cap S_2 = \{(0, 0, t_3)|t_3 \in \mathbb{R}\} \neq \{(0, 0, 0)\}$ y $S_2 \cap S_2' = S_2 \cap S_3 = \{(t_1, 0, 0)|t_1 \in \mathbb{R}\} \neq \{(0, 0, 0)\}$.

Las comprobaciones de que las sumas anteriores no son directas se pueden realizar también mediante la propiedad ii) del teorema 4.3.11, o bien, por la propia definición de suma directa.

Ejercicio 4.3.13 *Probar que la aplicación $f : S_1 \times S_2 \longrightarrow S_1 + S_2$ definida por $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ es biyectiva si y solo si $S_1 + S_2$ es suma directa.*

Definición 4.3.14 *Dos subespacios vectoriales de V se dicen subespacios suplementarios si $S_1 \oplus S_2 = V$.*

Ejemplo 4.3.15 *En el ejemplo 4.3.12, los subespacios S_1 y S_2 son suplementarios, ya que $S_1 \oplus S_2 = V$.*

4.3.1 Espacio vectorial cociente

Fijado un subespacio vectorial S de V, queda definida en V una relación de equivalencia: $a \equiv b \Leftrightarrow a - b \in S, \forall a, b \in V$

Consideramos el conjunto cociente $V/\equiv$, que denotaremos V/S,

$$V/S = \{[a] = a + S|a \in V\}$$

y en él las operaciones inducidas de las de V:

(+) (a + S) + (b + S) = (a + b) + S

(.) t (a + S) = (t a) + S

El conjunto V/S, respecto de las operaciones + y . anteriores tiene estructura de espacio vectorial.

Definición 4.3.16 *Denominaremos espacio vectorial cociente de V con respecto a S al espacio vectorial $(V/S,\ +,\ .\ )$.*

Ejemplo 4.3.17 *En $\mathbb{R}^2$, el subespacio $D = \{(x,x)|x \in \mathbb{R}\}$ da lugar al subespacio vectorial cociente $\mathbb{R}^2\ /D = \{(x,y)+D|x,y \in R\}$ constituido por las rectas de $\mathbb{R}^2$ paralelas a la bisectriz del primer cuadrante.*

4.4 Combinaciones lineales. Clausura lineal.

Sea $\{a_i, i = 1, 2, ..., n\}$ una familia finita de vectores del espacio vectorial V sobre K.

Definición 4.4.1 *Se denomina combinación lineal de los vectores de la familia $\{a_i, i = 1, 2, ..., n\}$ a cualquier vector de la forma $a = t_1\, a_1 + ... + t_n\, a_n, t_i \in K, i = 1, 2, ..., n$. A los escalares t_i se les llama coeficientes de dicha combinación lineal.*

Observemos que el vector nulo es combinación de los vectores de cualquier familia.

Teorema 4.4.2 *El conjunto de todas las combinaciones lineales de la familia $\{a_i, i = 1, 2, ..., n\}$ es un subespacio vectorial de V y es el mínimo que contiene a todos los vectores a_i. Lo denotaremos por $K(a_1, ..., a_n) = K(a_i)$, o bien $< a_1, ..., a_n >$.*

Demostr.: 1) Es subespacio vectorial de V. Sean $x, y \in K(a_i)$, es decir, $x = t_1\, a_1 + ... + t_n\, a_n = \sum_{i=1}^n t_i\, a_i$, $\quad y = t'_1\, a_1 + ... + t'_n\, a_n = \sum_{i=1}^n t'_i\, a_i \Rightarrow t\, x + s\, y = \sum_{i=1}^n (t\, t_i + s\, t'_i)\, a_i$ que pertenece a $K(a_i)$.

2) Es el mínimo. En efecto, sea S un subespacio vectorial de V que contiene a $\{a_i, i = 1, 2, ..., n\}$, entonces, también contiene a todas sus combinaciones lineales, es decir, $K(a_i) \subset S$. $\blacksquare$

Definición 4.4.3 *Al subespacio vectorial de todas las combinaciones lineales de los vectores de una familia $\{a_i, i = 1, 2, ..., n\}$ le llamaremos clausura lineal de los vectores de dicha familia.*

Definición 4.4.4 *Si un subespacio vectorial S coincide con la clausura lineal de una familia $\{a_i, i = 1, 2, ..., n\}$, se dice que S es el subespacio vectorial o la variedad lineal engendrada por $\{a_i, i = 1, 2, ..., n\}$ y también que $\{a_i, i = 1, 2, ..., n\}$ es un sistema generador de S.*

Definición 4.4.5 *Si V es la clausura lineal de una familia finita $\{a_i, i = 1, 2, ..., n\}$ se dice que V es de tipo finito.*

Ejercicio 4.4.6 $K(a_i) = K(a'_j) \Leftrightarrow$ *todo vector de la familia $\{a_i, i = 1, 2, ..., n\}$ es combinación lineal de la familia $\{a'_i, i = 1, 2, ..., n\}$ y recíprocamente.*

Definición 4.4.7 *Dos familias de vectores de estas características se dicen familias equivalentes.*

Propiedad 4.4.8 *La clausura lineal de una familia $\{a_i, i = 1, 2, ..., n\}$ coincide con la intersección de todos los subespacios que la contienen.*

4.5 Dependencia lineal. Base.

Definición 4.5.1 *Una familia finita* $\{a_i, i = 1, 2, ..., n\}$ *de vectores de* V *se dice ligada si existen escalares* $\{t_i, i = 1, 2, ..., n\}$ *tales que* $\sum_{i=1}^{n} t_i\, a_i = 0$ *con algún* $t_i \neq 0$. *Se dice también que los vectores son linealmente dependientes.*

Definición 4.5.2 *Una familia de vectores* $\{a_i, i = 1, 2, ..., n\}$ *se dice libre, si* $\sum_{i=1}^{n} t_i\, a_i = 0 \Rightarrow t_1 = ... = t_n = 0$. *Se dice también que los vectores de la familia* $\{a_i, i = 1, 2, ..., n\}$ *son linealmente independientes.*

Ejemplo 4.5.3 *En* $\mathbb{R}^3$, *los vectores (1,-1,0), (0,1,0) y (1,1,1) son linealmente independientes. En cambio los vectores (1,1,2) y (3,3,6) son linealmente dependientes.*

Ejemplo 4.5.4 *En el espacio vectorial* $\mathcal{C}^{(\infty}$*[0, 1] de las funciones continuas y derivables definidas en el intervalo* $I =$ *[0,1] y con valores en* $\mathbb{R}$, *las funciones sen y cos son linealmente independientes.*

En efecto: t sen + s cos = 0 $\Longleftrightarrow$ t sen x + s cos x, $\forall x \in [0, 1]$.
También se ha de cumplir que su derivada se anule, es decir, t cos x - s sen x = 0, $\forall x \in [0, 1]$
Resolviendo el sistema en t,s resulta t = s = 0.

Ejemplo 4.5.5 *En* $M_2(\mathbb{R})$, *las matrices*

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} \delta_{11}^{ij} & \delta_{12}^{ij} \\ \delta_{21}^{ij} & \delta_{22}^{ij} \end{bmatrix}, \quad \delta_{lm}^{ij} = \left\{ \begin{array}{l} 0,\ sii \neq l \ \text{ó}\ j \neq m \\ 1,\ sii = l \ y\ j = m \end{array} \right\}$$

son linealmente independientes.
En efecto: $\sum_{i,j=1}^{2} t_{ij}\, E_{ij} = 0 \Longrightarrow t_{ij} = 0,\ i, j = 1, 2$

Ejemplo 4.5.6 *En* $\mathbb{R}_n[x]$ *las familias* $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ *y* $\{1, 1-x, (1-x)^2, ..., (1-x)^n\}$ *son sistemas generadores y libres.*

Consecuencia 4.5.7 *Si* $0 \in \{a_i, i = 1, 2, ..., n\}$ *entonces, la familia es ligada.*

Consecuencia 4.5.8 *La familia* $\{a_i, i = 1, a_i \neq 0\}$ *es libre.*

Consecuencia 4.5.9 *Una familia con un vector repetido es ligada.*

Consecuencia 4.5.10 *Una familia* $\{a_i, i = 1, 2, ..., n\}$ *es ligada si y solo si uno de los vectores es combinación lineal de los restantes.*

Demostr.: Sea la combinación lineal $t_1\, a_1 + ... + t_n\, a_n = 0$ con algún $t_i \neq 0$.
Supongamos que es $t_1 \neq 0 \Rightarrow t_1^{-1} \in K \Rightarrow$

$$t_1^{-1}(t_1 a_1 + ... + t_n a_n) = a_1 + t_1^{-1} t_2 a_2 + ... + t_1^{-1} t_n a_n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = -t_1^{-1} t_2 a_2 - ... - t_1^{-1} t_n a_n.$$

El recíproco es trivial.■

Consecuencia 4.5.11 *Una familia* $\{a_i, i = 1, 2, ..., n\}$ *es libre si y solo si ningún vector ai es combinación lineal de los restantes.*

Consecuencia 4.5.12 *Si* $\{a_i, i = 1, 2, ..., n\}$ *es libre y* $x \in K(a_i)$, $\Rightarrow$ *los coeficientes de la combinación lineal* $x = t_1a_1 + ... + t_na_n$ *están determinados unívocamente.*

Demostr.: Supongamos que existieran otros coeficientes, se tendría a la vez:

$$x = t_1a_1 + ... + t_na_n = t'_1a_1 + ... + t'_na_n,$$

luego $(t_1 - t'_1)a_1 + ... + (t_n - t'_n)a_n = 0$
y como por hipótesis $\{a_i, i = 1, 2, ..., n\}$ es libre, se tiene $t_i = t'_i, i = 1, 2, ..., n$. ∎

Definición 4.5.13 *Se denomina base de* V *a una familia* $\{a_i, i = 1, 2, ..., n\}$ *de vectores de* V *que es 1) sistema generador de* V *y 2) libre.*

Aunque esta noción es válida para espacios vectoriales cualesquiera, en adelante, consideraremos solo espacios vectoriales de tipo finito.

Teorema 4.5.14 *La familia* $\{a_i, i = 1, 2, ..., n\}$ *es base de* V *si y solo si* $V = K(a_1) \oplus ... \oplus K(a_n)$

Demostr.: [⇒] Por ser base, la familia es libre y generadora, es decir,
$\forall x \in V : x = t_1a_1 + ... + t_na_n$ con t_i únicos, es decir,
$x = x_1 + ... + x_n$ con $x_i = t_ia_i$ únicos, o sea, $V = K(a_1) \oplus ... \oplus K(a_n)$.

[⇐] Es inmediato. ∎

Corolario 4.5.15 *Una familia* $\{a_i, i = 1, 2, ..., n\}$ *es base de* V *si y solo si todo vector de* V *se puede expresar de modo único como combinación lineal de los* $\{a_i, i = 1, 2, ..., n\}$.

Propiedad 4.5.16 *Una familia* $\{a_i, i = 1, 2, ..., n\}$ *es ligada* $\Longleftrightarrow$ *contiene a una subfamilia* $\{a'_j\}$ *tal que* $K(a_i) = K(a'_j)$

Demostr.: [⇒] Por ser $\{a_i, i = 1, 2, ..., n\}$ ligada, uno de ellos (por ejemplo, a_1) es combinación lineal de los demás, así que $a_1 = t_2a_2 + ... + t_na_n$, luego, si $x \in K(a_i) : x = s_1a_1 + ... + s_na_n = s_1(t_2a_2 + ... + t_na_n) + ... + s_na_n \in K(a'_j)$, es decir, $K(a_i) \subset K(a'_j)$

Además, evidentemente, $K(a'_j) \subset K(a_i)$.

[⇐] Si se verifica la hipótesis, ha de existir $a_j \in \{a_i, i = 1, 2, ..., n\}$ y $a_j \notin \{a'_i, i = 1, 2, ..., n\}$ con $a_j = t'_1a'_1 + ... + t'_na'_n \Leftrightarrow \{a_i, i = 1, 2, ..., n\}$ es ligada. ∎

Teorema 4.5.17 *Todo espacio vectorial* $V \neq 0$ *de tipo finito posee al menos una base.*

Demostr.: Por ser V de tipo finito ⇒ posee un sistema generador, sea $\{a_i, i = 1, 2, ..., n\}$, es decir, $V = K(a_1, ..., a_n)$. Si $\{a_i, i = 1, 2, ..., n\}$ es libre, el teorema está probado. Caso contrario, por el teorema 5.9, existe una subfamilia $\{a'_j\}$ tal que $K(a_i) = K(a'_j)$ que puede ser libre o ligada.

La demostración se acaba repitiendo el proceso un número finito de veces, hasta conseguir una familia constituida al menos por un vector que forzosamente ha de ser libre. ∎

Teorema 4.5.18 *(de la base) En un espacio vectorial* V *de tipo finito, todas las bases poseen el mismo número de elementos.*

Demostr.: Sean $\{a_i, i = 1, 2, ..., n\}$ y $\{b_k, k = 1, 2, ..., p\}$ dos bases de V, queremos probar que n = p. Para ello vamos a ir sustituyendo vectores de $\{a_i, i = 1, 2, ..., n\}$ por vectores de b_k.

En primer lugar, consideramos la familia $\{b_1, a_1, a_2, ..., a_n\}$ que es ligada, puesto que al ser $\{a_i, i = 1, 2, ..., n\}$ base de V, cualquier vector de V se puede expresar como combinación lineal de ellos; por lo tanto, existen $s'_1, t'_1, ..., t'_n \in K$, no todos nulos, tales que $s'_1 b_1 + t'_1 a_1 + ... + t'_n a_n = 0 (s'_1 \neq 0)$, en donde alguno de los t'_i ha de ser no nulo, pues, caso contrario, $s'_1 b_1 = 0$ y $s'_1 \neq 0 \Rightarrow b_1 = 0$, absurdo.

Por lo tanto, supongamos que t'_1 es no nulo $\Rightarrow a_1$ es combinación lineal de la familia $\{b_1, a_2, ..., a_n\}$ que es un sistema generador de V (t 5.9).

Tomemos ahora la familia $\{b_1, b_2, a_2, ..., a_n\}$ que es ligada, porque b_2 es combinación lineal de la familia $\{b_1, a_2, ..., a_n\}$.

Por lo tanto, deben existir n+1 escalares $s"_1, s"_2, t"_2, ..., t"_n \in K$, no todos nulos, tales que $s"_1 b_1 + s"_2 b_2 + t"_2 a_2 + ... + t"_n a_n = 0$, en donde alguno de los $t"_i$ ha de ser no nulo, pues, caso contrario, $s"_1 b_1 + s"_2 b_2 = 0$ y $s"_1 \neq s"_2 \neq 0$ que es absurdo por ser b_1 y b_2 linealmente independientes.

Por lo tanto, supongamos que $t"_2$ es no nulo $\Rightarrow a_2$ es combinación lineal de la familia $\{b_1, b_2, a_3, ..., a_n\}$ que es un sistema generador de V (t 5.9).

Este proceso puede continuarse, caso de que p < n, hasta obtener la familia generadora $\{b_1, .., b_p, a'_{p+1}, ..., a'_n\}$

Si p = n tendríamos el sistema generador $\{b_1, .., b_n\}$ (*)

El caso p > n no puede ocurrir, ya que si así fuese, en el paso n-ésimo anterior resultaría la familia generadora (*) , de modo que los vectores $\{b_{n+1}, .., b_p\}$ serían combinación lineal de $\{b_1, .., b_n\}$ que es una base de V. En resumen, p $\leq$ n

En forma similar podemos razonar cambiando vectores de la base $\{b_1, .., b_p\}$ por vectores de la base $\{a_1, ..., a_n\}$, hasta concluir que p $\geq$ n.

En definitiva, p = n. ∎

Definición 4.5.19 *Se denomina dimensión (o rango) de un espacio vectorial de tipo finito al número de elementos de una base cualquiera del mismo. Se denota por* $dim_K V$.

Definición 4.5.20 *Se denomina rango de un sistema de vectores* $\{b_1, ..., b_n\}$ *a la dimensión de su clausura lineal. Por convenio,* $dim \{0_V\} = 0$.

Fijada una base $\{a_1, ..., a_n\}$ de V, queda definida una aplicación biyectiva

$$g : V \longrightarrow K_n$$

mediante g(a) = ($t_1, ..., t_n$) si $a = t_1 a_1 + ... + t_n a_n$.

Definición 4.5.21 *La aplicación anterior se llama sistema coordenado. La i-ésima componente* t_i *de g(a) se denomina coordenada i-ésima de a respecto de la base* $\{a_1, ..., a_n\}$.

Definición 4.5.22 *Se llama sistema libre maximal, F , a un sistema libre de vectores tal que si* $F \subset F', F' \neq F$, *entonces F' es ligado.*

Definición 4.5.23 *Se llama sistema generador minimal de V a un sistema G generador de V tal que si* $G' \subset G, G' \neq G$, *entonces G' no es sistema generador de V.*

Teorema 4.5.24 *Las siguientes proposiciones son equivalentes:*
1) F es base de V.
2) F es sistema libre maximal de V.
3) F es sistema generador minimal de V.
Demostr.: [1)⇒2)] Sea $\{a_1, ..., a_n\}$ base de V. Cualquier sistema que lo contenga propiamente, $\{a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_p\}$, no puede ser libre, pues b_j es combinación lineal de $\{a_1, ..., a_n\}$; por lo tanto, $\{a_1, ..., a_n\}$ es sistema libre maximal.

La demostración de las restantes implicaciones se propone como ejercicio. ■

Teorema 4.5.25 *(de completar una base).- Sea V un espacio vectorial de dim V = n y sea* $\{a_1, ..., a_p\}, p < n$*, una familia libre de V. Entonces, se pueden encontrar n-p vectores* $\{a_{p+1}, ..., a_n\}$ *de V tales que la familia* $\{a_1, ..., a_p, a_{p+1}, ..., a_n\}$ *es una base de V.*

Demostr.: Como p < n , existe por lo menos un vector a_{p+1} de V tal que $\{a_1, ..., a_p, a_{p+1}\}$ es libre. En efecto: caso contrario, a_{p+1} sería combinación lineal de p vectores libres de V, siendo p < dim V = n, lo que es absurdo.

Repitiendo este proceso n-p veces, construiríamos la familia libre $\{a_1, ..., a_p, a_{p+1}, ..., a_n\}$ que por tener n elementos (t^a 4.5.24) también sería generadora de V, luego sería base. ■

Ejercicio 4.5.26 *Sea el espacio vectorial* $\mathbb{R}^4$ *y la familia* $\{a_1, a_2\}$*,* a_1*= (1,1,0,0),* a_2 *= (0,1,0,1). Completar dicha familia hasta conseguir una base de* $\mathbb{R}^4$*.*

Solución: $K(a_1, a_2) \subset \mathbb{R}^4$ y $\{a_1, a_2\}$ es libre evidentemente. Por el teorema 4.5.25, existen $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ es base de $\mathbb{R}^4$. Escojamos $a_3 \notin K(a_1, a_2)$; por ejemplo, a_3 = (1,1,1,0) que verifica $a_3 \neq t(1, 1, 0, 0) + s(0, 1, 0, 1)$

Ahora escogemos $a_4 \notin K(a_1, a_2, a_3)$, es decir, $a_4 \neq t(1, 1, 0, 0) + s(0, 1, 0, 1) + r(1, 1, 1, 0)$

La familia $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ así elegida es una base de $\mathbb{R}^4$, como fácilmente se puede comprobar. ■

Corolario 4.5.27 *Sea V de dim V = n. Entonces,*
una familia de n vectores de V es base $\Longleftrightarrow$ *es libre* $\Longleftrightarrow$ *es sistema generador.*

Teorema 4.5.28 *(de substitución) Sea* $\{a_1, ..., a_n\}$ *una base de V y* $\{b_1, ..., b_p\}, p < n$*, una familia libre. Entonces, se pueden sustituir p vectores de* $\{a_1, ..., a_n\}$ *(salvo reordenaciones) por* $\{b_1, ..., b_p\}$ *de modo que la familia* $\{b_1, ..., b_p, a_{p+1}, ..., a_n\}$ *es otra base de V.*
Demostr.: El proceso consiste en ir añadiendo un b_i, a la familia $\{a_1, ..., a_n\}$ y extraer un a_j de la familia resultante hasta introducirlos todos, en la forma expresada en la demostración del teorema 4.5.18. ■

Ejercicio 4.5.29 *Sea* $\mathbb{R}_n[x]$ *y la base* $\{1, x, ..., x^n\}$*. Introducir en esta base los vectores* $p(x) = 1 + x + x^2, q(x) = x + x^2 + x^3$.

Solución: La familia $\{1 + x + x^2, 1, x, ..., x^n\}$ es ligada y, como $1 + x + x^2 = 1 + x + x^2 + 0\,x^3 + ... + 0\,x^n$, por ejemplo, x depende linealmente de los restantes y lo podemos sacar de la base inicial.

La familia $\{x + x^2 + x^3, 1 + x + x^2, 1, x^2, ..., x^n\}$ es ligada y, como $q(x) = x + x^2 + x^3 = 1 + x + x^2 + (-1)1 + 0\,x^2 + 1\,x3 + ... + 0\,x^n$, por ejemplo, x^3 depende linealmente de los restantes y lo podemos sacar de la base inicial.

Así que la familia $\{x + x^2 + x^3, 1 + x + x^2, 1, x^3, ..., x^n\}$ es otra base de $\mathbb{R}_n$[x] . ■

4.6 Cambio de base.

Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sean $B_a = \{a_1, ..., a_n\}$, $B_b = \{b_1, ..., b_n\}$ dos bases de V que, como sabemos, definen sendos sistemas coordenados. Supongamos que las coordenadas de un vector x genérico de V son, respectivamente, $(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)$. A las matrices columna correspondientes les llamaremos X_a y X_b. Deseamos relacionar las coordenada de dicho vector en ambas bases. Para ello, supondremos conocidas las coordenadas de los vectores de una base respecto de la otra; en particular, sean $(b_{j1}, ..., b_{jn}), j = 1, 2, ..., n$, las coordenadas de los vectores $\{b_1, ..., b_n\}$ respecto de la base B_a. A sus matrices coordenadas les llameremos B_j.

En estas condiciones podemos escribir utilizando matrices por bloques (columnas):

$$x = x_1\, a_1 + ... + x_n\, a_n = [a_1 \,...\, a_n]\, X_a, \tag{4.1}$$

$$x = y_1\, b_1 + ... + y_n\, b_n = [b_1 \,...\, b_n]\, X_b \tag{4.2}$$

$$b_j = [a_1 \,...\, a_n]\, B_j \tag{4.3}$$

Sustituyendo la (4.3) en (4.2) e igualando a la (4.1) resulta:

$$x = [a_1 \,...\, a_n]\, X_a = [a_1 \,...\, a_n]\, [B_1 \,...\, B_n]\, X_b$$

De donde se obtiene:

$$X_a = [B_1 \,...\, B_n]\, X_b \tag{4.4}$$

Definición 4.6.1 *A la ecuación (4.3) le denominaremos ecuación matricial del cambio de la base B_a a la B_b.*

A la ecuación (4.4) le denominaremos ecuación matricial del cambio de coordenadas de la base B_a a la B_b

Estas ecuaciones expresan la relación existente entre las coordenadas en ambas bases de un vector arbitrario de V.

Definición 4.6.2 *La matriz*

$$P = [B_1 \,...\, B_n]$$

que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de la base B_b respecto de la base B_a se le denomina matriz del cambio de B_a a B_b.

En forma completamente análoga se obtendrían las ecuaciones del cambio de base inverso, que se escribirían:

$$a_j = [b_1 \,...\, b_n]\, A_j \tag{4.5}$$

Sustituyendo las (4.5) en (4.1) e igualando a la (4.2) resulta:

$$x = [b_1 \,...\, b_n]\, X_b = [b_1 \,...\, b_n]\, [A_1 \,...\, A_n]\, X_a$$

De donde se obtiene:

$$X_b = [A_1 \,...\, A_n]\, X_a \tag{4.6}$$

Propiedad 4.6.3 *La matriz $Q = [A_1 \,...\, A_n]$ que define el cambio inverso coincide con la inversa de la matriz P del cambio directo.*

Demostr.: Sustituyendo la (4.4) en la (4.6 resulta:

$$X_b = [A_1 \dots A_n]\,[B_1 \dots B_n]\,X_b, \text{ es decir, } X_b = Q\,P\,X_b \Longrightarrow Q\,P = I$$

Sustituyendo al revés, resulta: $P\,Q = I$.■

Corolario 4.6.4 *Toda matriz que define un cambio de base es regular*

Ejercicio 4.6.5 *Dada la base B_e de $\mathbb{R}^3$ formada por los vectores $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (0,1,1)$, $e_3 = (1,0,1)$, encontrar la base $B_a = \{a_1, a_2, a_3\}$ tal que las ecuaciones del cambio de coordenadas vengan dadas por:*

$$\begin{aligned} x^1 &= y^1 - 2\,y^3 \\ x^2 &= -y^2 + 5\,y^3 \\ x^3 &= y^1 - 3\,y^3 \end{aligned}$$

Solución: Sean X e Y las coordenadas de un vector cualquiera respecto de las bases B_e y B_a, respectivamente. Las ecuaciones dadas se pueden escribir en forma matricial como

$$X = P\,Y, \quad \text{siendo } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

por lo que P es la matriz del cambio de base (ver (4.4)). En consecuencia, la nueva base será (ver (4.3)):

$$[a_1\, a_2\, a_3] = [e_1\, e_2\, e_3]\,P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Es decir, $a_1 = (2,1,2), a_2 = (0,-1,-1), a_3 = (-5,3,0)$

4.7 Dimensión de subespacios.

Consideraremos en este párrafo espacios vectoriales de tipo finito.

Proposición 4.7.1 *Si S es un subespacio vectorial de $V \Rightarrow S$ es de tipo finito y dim $S \leq$ dim V.*

Demostr.: Es evidente que si V es de tipo finito, también S lo es. Sea, entonces, p = dim S. Por el teorema 4.5.18, existe una base de S que consta de p elementos $\{a_1, ..., a_p\}$. Esta es una familia libre de V, por lo que: 1) si $\{a_1, ..., a_p\}$ es base de V , p = n y V = S ; 2) si $\{a_1, ..., a_p\}$ no es base de V , p < n .■

Ejemplo 4.7.2 *Sea $S = K(x, 1+x, x^2)$ subespacio de $\mathbb{R}_3[x]$. Entonces, S es de tipo finito y dim S = 3 < 3+1 = dim $\mathbb{R}_3[x]$.*

Proposición 4.7.3 *1) Sea $B = \{a_1, ..., a_n\}$ una base de V y $B = B_1 \cup B_2$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, $B_1 \neq \emptyset \neq B_2$. Entonces, $K(B_1)$ y $K(B_2)$ son suplementarios.*
2) Todo subespacio vectorial S_1 de V admite un subespacio suplementario.

Demostr.: [1)] Sea j , fijo cualquiera, $1 \leq j \leq n$. Tomemos $B_1 = \{b_1, ..., b_j\}$, $B_2 = \{b_{j+1}, ..., b_n\}$ de forma que $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, $B_1 \neq \emptyset \neq B_2$. Entonces,

$$a = (t_1\, a_1 + ... + t_j\, a_j) + (t_{j+1}\, a_{j+1} + ... + t_n\, a\, n) \in K(B_1) + K(B_2)$$

Como los t_i son únicos por ser B base de V, la suma anterior es directa, es decir, $V \subset K(B_1) \oplus K(B_2)$.
El contenido opuesto es inmediato. Por lo tanto, $K(B_1)$ y $K(B_2)$ son suplementarios.

[2)] Por el teorema 4.7.1, $S_1 \subset V$ es de tipo finito; sea $B_1 = \{b_1, ..., b_p\}$ una base de S_1 ; se puede completar (t 4.5.25) con $\{b_{p+1}, ..., b_n\} = B_2$ hasta construir una base de V. Por la propiedad 1) anterior, $K(B_1)$ y $K(B_2)$ son suplementarios.■

Notemos que el suplementario de un subespacio no tiene por qué ser único; por ejemplo,

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\,(1,0) \oplus \mathbb{R}\,(1,1) = \mathbb{R}\,(1,-1) \oplus \mathbb{R}\,(1,-2)$$

Teorema 4.7.4 *(de las dimensiones).- Si S_1 y S_2 son subespacios vectoriales de V, se verifica:*

$$dim(S_1 + S_2) + dim(S_1 \cap S_2) = dimS_1 + dimS_2$$

Demostr.: Supongamos $S_1 \cap S_2 \neq \{0\}$ y (t^a 4.7.1) sean $dimS_1 = n$, $dimS_2 = m$, $dimS_1 \cap S_2 = p$. Sea $\{c_1, ..., c_p\}$ una base de $S_1 \cap S_2$, que podemos completar hasta obtener $\{c_1, ..., c_p, a_1, ..., a_{n-p}\}$ base de S_1 y $\{c_1, ..., c_p, b_1, ..., b_{m-p}\}$ base de S_2.

Entonces, $\{c_1, ..., c_p, a_1, ..., a_{n-p}, b_1, ..., b_{m-p}\}$ es base de $S_1 + S_2$.
En efecto: i) es sistema generador: $x \in S_1 + S_2 \Longleftrightarrow x = x_1 + x_2, x_1 \in S_1, x_2 \in S_2 \Longleftrightarrow$

$$x = s_1\, c_1 + ... + s_p\, c_p + r_1\, a_1 + ... + r_{n-p}\, a_{n-p} + s'_1\, c_1 + ... + s'_p\, c_p + t_1\, b_1 + ... + t_{m-p}\, b_{m-p} =$$

$$= (s_1 - s'_1)\, c1 + ... + (s_p - s'_p)\, c_p + r_1\, a_1 + ... + r_{n-p}\, a_{n-p} + t_1\, b_1 + ... + t_{m-p}\, b_{m-p}$$

ii) es libre, puesto que

$$s_1\, c_1 + ... + s_p\, c_p + r_1\, a_1 + ... + r_{n-p}\, a_{n-p} + t_1\, b_1 + ... + t_{m-p}\, b_{m-p} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_1\, b_1 + ... + t_{m-p}\, b_{m-p} = -(s_1\, c_1 + ... + s_p\, c_p + r_1\, a_1 + ... + r_{n-p}\, a_{n-p}) \in S_1 \cap S_2$$

luego,

$$t_1\, b_1 + ... + t_{m-p}\, b_{m-p} = t'_1\, c_1 + ... + t'_p\, c_p$$

pero como $\{c_1, ..., c_p, b_1, ..., b_{m-p}\}$ base de $S_2 \Rightarrow t_i = t'_j = 0$, para i = 1, 2, .., m-p, j = 1, 2, ..., p.
Análogamente se deduce que $r_i = 0, i = 1, 2, ..., n - p$.

En consecuencia, basta sumar el número de elementos de cada base para obtener el resultado requerido.

En el caso de que $S_1 \cap S_2 = \{0\}$, $dimS_1 \cap S_2 = 0$ y la relación anterior sigue verificándose.
■

Corolario 4.7.5 *Si $S_1 + S_2$ es suma directa,*

$$dim(S_1 \oplus S_2) = dimS_1 + dimS_2$$

En este caso, una base de $S_1 \oplus S_2$ es la unión de una base de S_1 y otra de S_2.

Ejercicio 4.7.6 *En* $\mathbb{R}^4$ *se considera el subespacio* S_1 *engendrado por (1,2,3,4), (2,2,2,6) y (0,2,4,4) y el* S_2 *engendrado por (1,0,-1,2) y (2,3,0,1). Determinar bases y dimensiones de los subespacios* $S_1, S_2, S_1 \cap S_2$ *y* $S_1 \oplus S_2$

Solución:

$$dimS = rg \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix} = 3$$

Luego son linealmente independientes y generadores de S, es decir, forman una base de S.

$$dimT = rg \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

Luego son linealmente independientes y generadores de T, es decir, forman una base de T.

La unión de ambas bases es un sistema generador de la suma S + T. Haciendo reducción por filas de la matriz que los tiene por columnas resulta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

lo que nos dice que dim (S + T) = 4 y también que el cuarto vector es combinación lineal de los tres primeros, es decir, pertenece a la intersección de S y T. Además, por el teorema 4.7.4, se tiene que

$$dim(S \cap T) = dimS + dimT - dim(S + T) = 1,$$

luego una base de la intersección es la compuesta por el cuarto vector (1,0,-1,2).

4.8 Ejercicios para resolver

Ejercicios de [1] (Merino) números 16, 13, 12,14, 15, 18, 19, 20, 21, 22, 24

Ejercicios de [4] (Arvesu) capítulo 5, números 5.2, 5.4, 5.7, 5.8, 5.11, 5,20, 5.23, 5.25

Ejercicios de [3] (de la Villa) capítulo 1, números 1, 5, 7, 8, 10, 11, 14, 16, 19