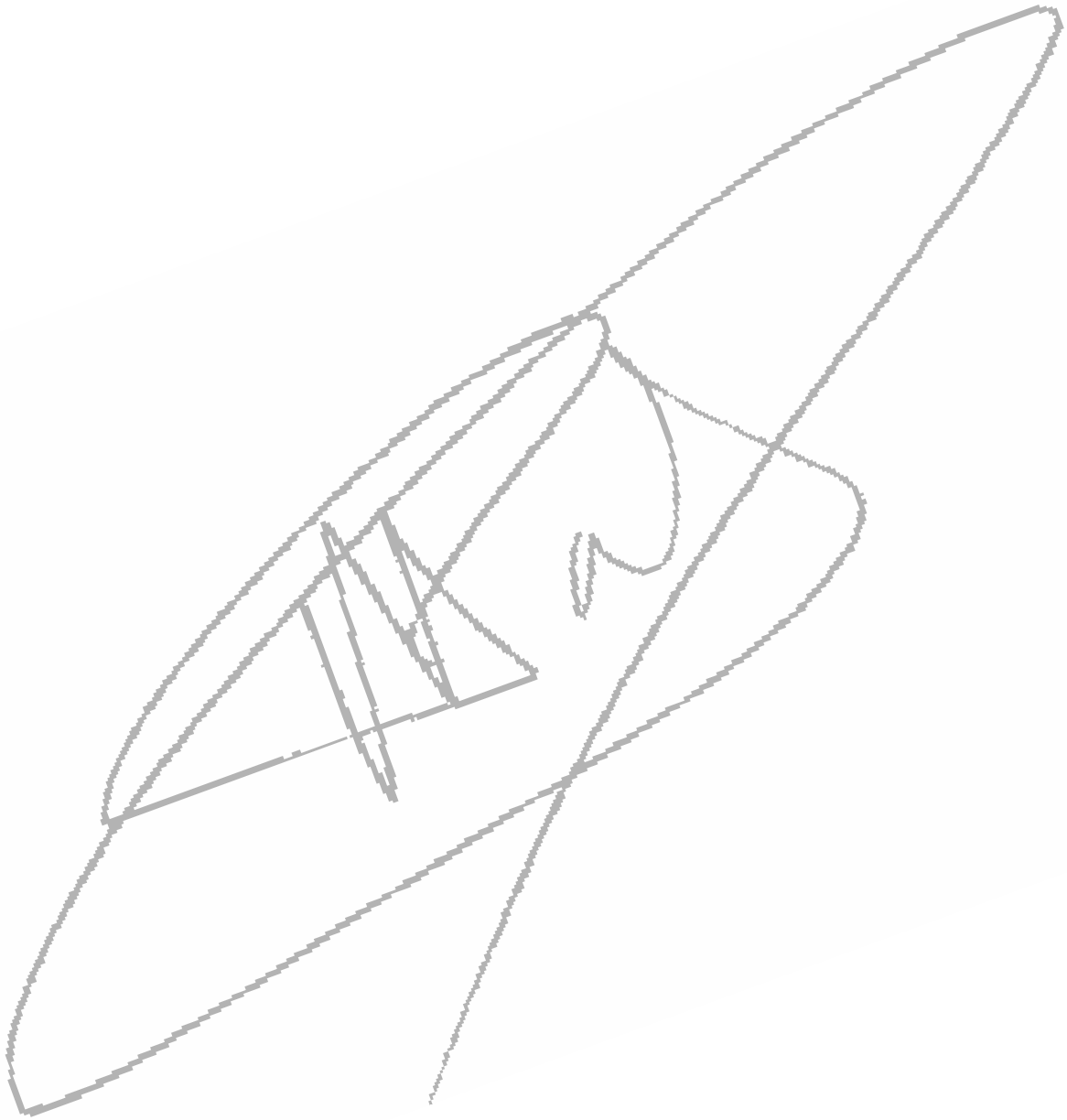




# 10. Geometría diferencial de curvas y superficies.

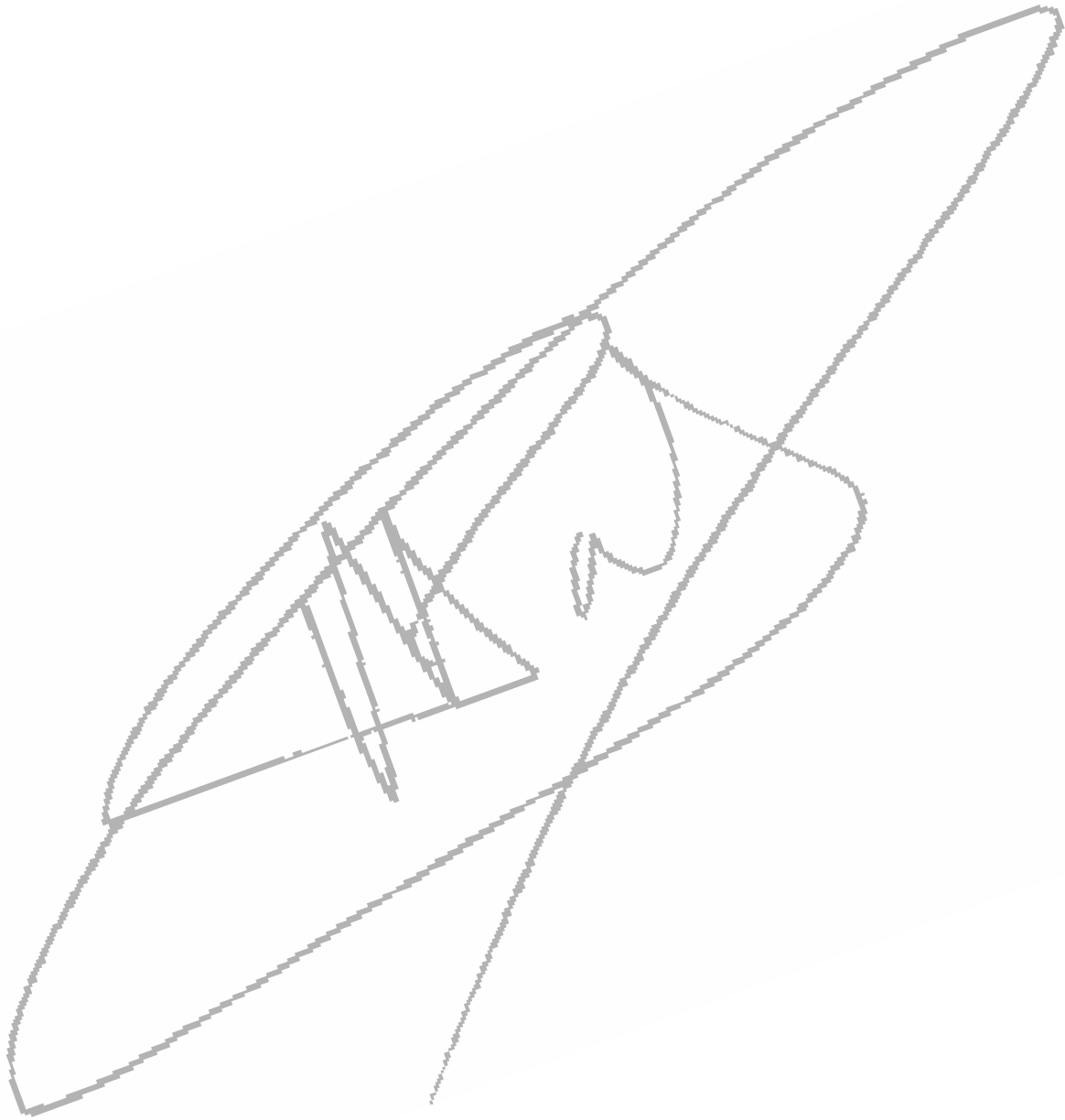
Manuel Palacios  
Departamento de Matemática Aplicada  
Centro Politécnico Superior  
Universidad de Zaragoza

Otoño 2010



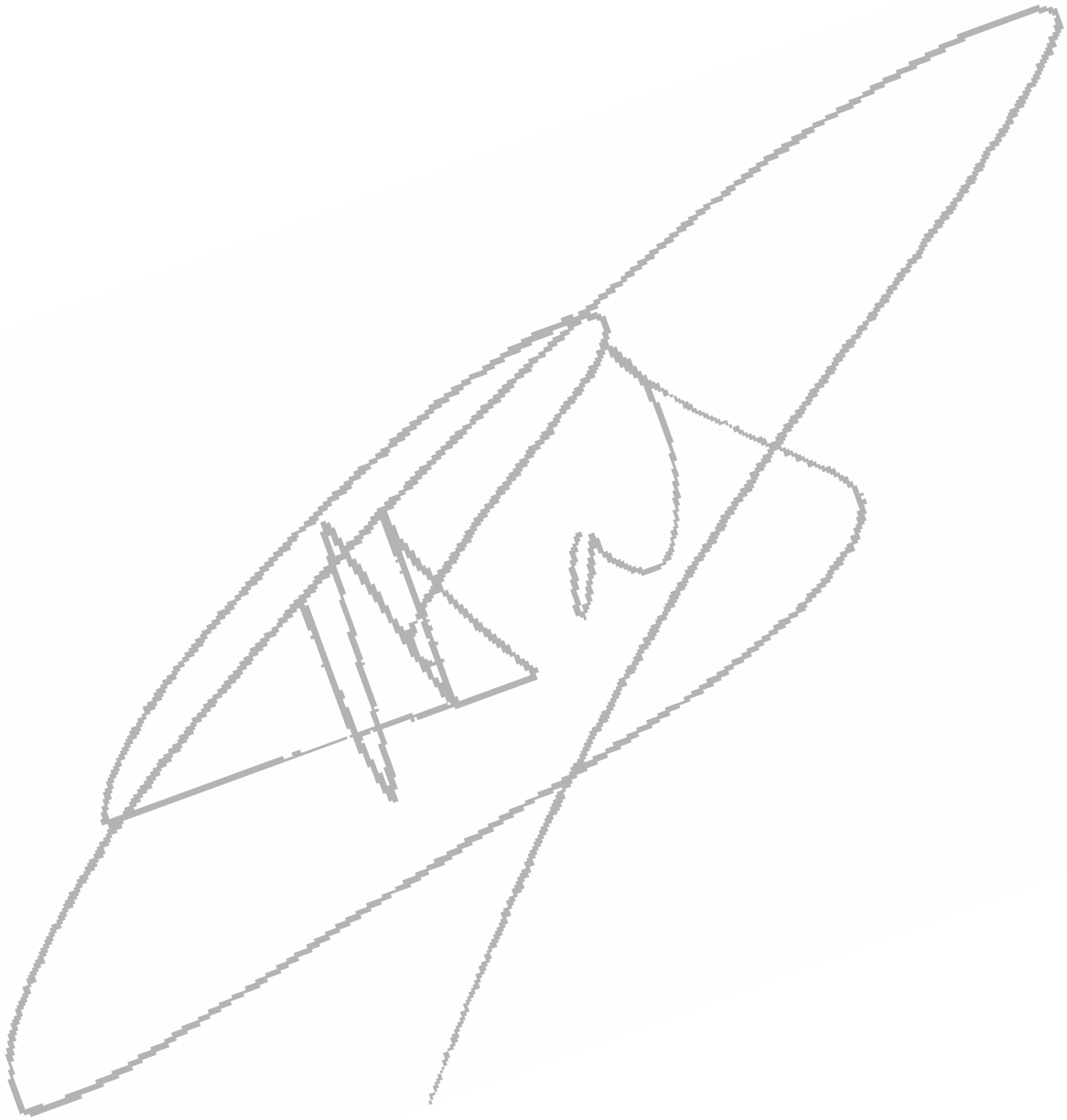
# Contents

<b>10 Geometría diferencial de curvas y superficies.</b>	<b>7</b>
10.1 Geometría diferencial de curvas . . . . .	7
10.1.1 Definición y representación paramétrica . . . . .	7
10.1.2 Longitud de curvas. . . . .	8
10.1.3 Recta tangente y plano normal. . . . .	9
10.1.4 Curvatura y torsión. . . . .	9
10.1.5 Fórmulas de Frènet. . . . .	12
10.1.6 Ejercicios propuestos . . . . .	12
10.2 Geometría diferencial de superficies . . . . .	13
10.2.1 Representación paramétrica. . . . .	13
10.2.2 Plano tangente. Recta normal. . . . .	14
10.2.3 Primera forma fundamental . . . . .	16
10.2.4 Longitud de un arco y area de una superficie . . . . .	17
10.2.5 Curvatura normal. Segunda forma fundamental. . . . .	18
10.2.6 Ejercicios propuestos . . . . .	19



# Bibliography

- [Struik(1971)] Struik, D. J. *Geometría diferencial clásica*, Aguilar, 1955.
- [Lipschutz(1971)] Lipschutz, S., *Geometría diferencial*, Col. Schaum, McGraw-Hill, 1971.
- [Galindo et al.(2005)] Galindo, F., Sanz, J., and Tristán, L. A., *Guía práctica de Cálculo infinitesimal en varias variables*, Thomson, 2005.
- [Martínez Salas(1975)] Martínez Salas, J., *Elementos de Matemáticas*, El autor, Valladolid, 1975.
- [Merino and Santos(2006)] Merino, L., and Santos, E., *Álgebra lineal con métodos elementales*, Thomson, 2006.
- [Palacios(2010)] Palacios, M., *Problemas de Álgebra*, vol. Grado Ing. Tecn. Industr. of <http://pcmap.unizar.es/~mpala>., 2010.
- [Villa(1988)] Villa, A. de la, *Problemas de Álgebra*, CLAGSA, 1988.
- [Arvesu et al.(2005)] Arvesu, J., Marcellán, F., and Sánchez, J., *Problemas resueltos de Álgebra lineal. Paso a paso*., Thomson, 2005.
- [Burden and Faires(2006)] Burden, R. L., and Faires, J. D., *Numerical Analysis*, PWS-Kent Publ. Co., 2006.
- [Burgos(2000)] Burgos, J. de, *Álgebra lineal y geometría cartesiana*, McGraw-Hill, Madrid, 2000.
- [Burgos(1993)] Burgos, J. de, *Álgebra lineal*, McGraw-Hill, Madrid, 1993.
- [Griffel(1989)] Griffel, D. G., *Linear Algebra and its Applications*, vol. 1 & 2, Ellis Horwood, 1989.
- [Hernández(1994)] Hernández, E., *Álgebra y geometría*, Addison-Wesley, Madrid, 1994.
- [Rojo(1989)] Rojo, J., *Álgebra lineal con métodos elementales*, Vector Ediciones, Madrid, 1989.
- [Rojo and Martín(1989)] Rojo, J., and Martín, I., *Ejercicios y problemas de Álgebra lineal*, Editorial AC, Madrid, 1989.
- [Diego(1986)] Diego, B. de, *Problemas de Álgebra lineal*, Deimos, Madrid, 1986, seg. ed.



# Chapter 10

## Geometría diferencial de curvas y superficies.

### 10.1 Geometría diferencial de curvas

En este capítulo introduciremos los conceptos de curva y superficie. Veremos cómo se puede definir cualquier curva a partir de dos parámetros reales, la curvatura y la torsión. También veremos que las características de una superficie se pueden describir en función de parámetros escalares. En todo el capítulo consideraremos que estamos trabajando en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$ .

Se puede consultar la siguiente bibliografía: [Lipschutz(1971)] cap. 4 y 5, [Struik(1971)], [Martínez Salas(1975)] cap. 32 y [Galindo et al.(2005)] cap. 4 y 9

#### 10.1.1 Definición y representación paramétrica

**Definición 10.1.1** *Llamaremos curva regular a una función vectorial  $\mathbf{x}(t)$ ,  $t \in I$  (un intervalo de  $\mathbb{R}$ ) que cumple:*

- i)  $\mathbf{x}(t)$  es de clase  $\mathcal{C}^1$  en  $I$*
- ii)  $\mathbf{x}'(t) \neq 0$ , para todo  $t \in I$*

*La variable  $t$  se llama parámetro de la curva.*

En adelante, supondremos que la función  $\mathbf{x}(t)$  es de clase suficientemente alta para nuestros cálculos.

Se pueden utilizar diferentes parámetros,  $t$ ,  $\theta$ , para definir una curva, con la condición de que la función que los relaciona,  $t = t(\theta)$ , sea un cambio admisible, es decir,

**Definición 10.1.2** *Un cambio de variable,  $t = t(\theta)$ , se dice admisible si verifica:*

- i)  $t(\theta)$  es de clase  $\mathcal{C}^1$  y*
- ii)  $\frac{dt}{d\theta} \neq 0$  en su intervalo de definición.*

**Ejemplo 10.1.3** *La curva que en coordenadas polares tiene por ecuación:  $r = 2 \cos \theta - 1$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  está definida también por*

$$x(\theta) = (\cos \theta (2 \cos \theta - 1), \operatorname{sen} \theta (2 \cos \theta - 1)),$$

o bien, si hacemos  $\theta = -t$ , por

$$x(\theta) = (\cos t (2 \cos t - 1), -\operatorname{sen} t (2 \cos t - 1)). \blacksquare$$

Observad que la gráfica de la curva es la misma, pero recorrida en sentido contrario, es decir, ha cambiado la orientación al cambiar de parámetro. Cualquier propiedad de la curva debe ser independiente del parámetro utilizado.

## 10.1.2 Longitud de curvas.

Consideremos una partición  $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$  del intervalo  $I$  en donde está definida la curva  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  y la poligonal de vértices los puntos  $\mathbf{x}(t_j)$ .

**Definición 10.1.4** Diremos que la **curva es rectificable** si existe el supremo de  $\sum_{j=1}^n |\mathbf{x}(t_{j+1}) - \mathbf{x}(t_j)|$  que llamaremos **longitud  $s$  de la curva**, es decir,

$$s = \sup_P \sum_{j=1}^n |\mathbf{x}(t_{j+1}) - \mathbf{x}(t_j)| = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2} dt = \int_a^b \left|\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}\right| dt$$

**Ejemplo 10.1.5** La longitud del arco de hélice  $\mathbf{x} = (a \cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  es

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt = 2\pi \sqrt{a^2 + b^2} \blacksquare$$

Podemos considerar la función

$$s = s(t) = \int_0^t \left|\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}\right| dt$$

que, por el teorema fundamental del cálculo integral, es derivable y

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}\right|$$

y, por lo tanto,  $s$  es un parámetro admisible, que llamaremos parámetro natural o **longitud de arco**.

**Ejercicio 10.1.6** Introducir la longitud de arco como parámetro natural en la curva

$$\mathbf{x} = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t, e^t), \quad -\infty < t < \infty$$

**Solución:**

$$s = s(t) = \int_0^t \left|\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}\right| dt = \int_0^t \sqrt{3} e^t dt = \sqrt{3} (e^t - 1)$$

Despejando  $t$  y sustituyendo resulta:

$$\mathbf{x} = (s/\sqrt{3} + 1) (\cos \log(s/\sqrt{3} + 1), \operatorname{sen} \log(s/\sqrt{3} + 1), 1). \blacksquare$$

En adelante, escribiremos.  $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{ds}$  y  $\mathbf{x}' = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$



### 10.1.3 Recta tangente y plano normal.

Evidentemente,  $\dot{\mathbf{x}}$  es un vector en la dirección de la recta tangente a la curva, por eso

**Definición 10.1.7** Llamaremos **vector tangente** (fig. 10.1) unitario a la curva  $\mathbf{x}(s)$  al vector

$$\mathbf{t} = \dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{ds}$$

**Ejemplo 10.1.8** Para la hélice:  $\mathbf{x} = (a \cos t, a \sin t, bt)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , se tiene:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = (-a \sin t, a \cos t, b) \implies \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} / \frac{ds}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} / \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (-a \sin t, a \cos t, b) \quad \blacksquare$$

La recta tangente a la curva en el punto  $\mathbf{x}_0$  tendrá, entonces, por ecuación:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{t}_0,$$

mientras que el **plano normal** (fig. 10.2) ortogonal a la tangente será.

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{t} = 0$$

**Ejemplo 10.1.9** Para la curva:  $\mathbf{x} = (t, t^2, t^3)$  en  $t = 1$ , se tiene:

$$\text{Recta tangente: } \mathbf{x} = (1, 1, 1) + \lambda (1, 2, 3) / \sqrt{14} = (1, 1, 1) + \lambda (1, 2, 3)$$

$$\text{Plano normal: } (\mathbf{x} - (1, 1, 1)) \cdot (1, 2, 3) = 0 \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \quad \blacksquare$$

### 10.1.4 Curvatura y torsión.

**Definición 10.1.10** Llamaremos **vector curvatura** de la curva en  $\mathbf{x}(t)$  al vector

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}(s) = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \ddot{\mathbf{x}}(s)$$

**Definición 10.1.11** Llamaremos **curvatura**,  $\kappa$ , y **radio de curvatura**,  $\rho$ , de la curva en  $\mathbf{x}(t)$ , respectivamente, al módulo del vector curvatura

$$|\kappa| = |\mathbf{k}(s)|$$

y a su recíproco

$$\rho = \frac{1}{|\kappa|}$$

Se puede ver que la curvatura es igual al valor del cambio de dirección de la tangente con respecto a la longitud de arco.

**Ejemplo 10.1.12** Para la circunferencia:  $\mathbf{x} = (a \cos t, a \sin t)$ , se tiene:

$$\mathbf{t} = (-\sin t, \cos t), \quad \mathbf{k} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{dt} / \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| = \frac{-1}{a} (\cos t, \sin t), \quad |\kappa| = \frac{1}{a}, \quad \rho = a \quad \blacksquare$$

**Ejemplo 10.1.13** Para la hélice:  $\mathbf{x} = (a \cos t, a \sin t, bt)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , se tiene:

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (-a \sin t, a \cos t, b), \quad \mathbf{k} = \frac{-a}{a^2 + b^2} (\cos t, \sin t, 0),$$

$$|\kappa| = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \rho = \frac{a^2 + b^2}{a} \quad \blacksquare$$

Obsérvese que, en este caso, el vector curvatura está en el plano Oxy y dirigido hacia el eje Oz y que la curvatura es constante.

**Propiedad 10.1.14** Dada la curva  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ , se verifica:

$$|\kappa| = \frac{|x' \times x''|}{|x'|^3}$$

**Definición 10.1.15** Al vector unitario,  $\mathbf{n}$ , paralelo a  $\mathbf{k}$  se le denomina **vector normal** (fig. 10.1) a la curva, es decir

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$$

**Propiedad 10.1.16** Dada la curva  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ , se verifica:

$$\kappa = \mathbf{k}(s) \cdot \mathbf{n}(s)$$

**Definición 10.1.17** La recta paralela a  $\mathbf{n}$  en  $\mathbf{x}(t_0)$  se le denomina **recta normal principal** a la curva, y su ecuación es

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t_0) + \lambda \mathbf{n}$$

**Definición 10.1.18** El plano paralelo a los vectores tangente y normal,  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{n}$  en  $\mathbf{x}(t_0)$  se le denomina **plano osculador** (fig. 10.2) a la curva, y su ecuación es

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t_0)) \cdot (\mathbf{t} \times \mathbf{n}) = 0$$

**Ejemplo 10.1.19** Para la hélice:  $\mathbf{x} = (\cos t, \sin t, t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  se tiene:

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\sin t, \cos t, 1), \quad \kappa = \frac{-1}{2} (\cos t, \sin t, 0), \quad \mathbf{n} = -(\cos t, \sin t, 0)$$

$$\text{Normal principal en } t = \pi/2: \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(\pi/2) + \lambda \mathbf{n}(\pi/2) = (0, 1, \pi/2) + \lambda (0, 1, 0)$$

$$\text{Plano osculador en } t = \pi/2: \quad (\mathbf{x} - \mathbf{x}(\pi/2)) \cdot (\mathbf{t}(\pi/2) \times \mathbf{n}(\pi/2)) = 0, \text{ es decir, } x_1 + x_3 = \pi/2 \quad \blacksquare$$

Obsérvese que siempre los vectores tangente y normal,  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{n}$ , son ortogonales unitarios, por lo que podemos dar la siguiente

**Definición 10.1.20** Se le denomina **vector binormal** (fig. 10.1) a la curva en  $\mathbf{x}(t)$  al vector

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$$

que, evidentemente, es unitario

**Definición 10.1.21** La terna  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  define un triedro ortonormal llamado **triedro móvil** o de **Frènet** (fig. 10.1)

**Definición 10.1.22** La recta paralela a  $\mathbf{b}$  en  $\mathbf{x}(t_0)$  se le denomina **recta binormal** a la curva, y su ecuación es

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t_0) + \lambda \mathbf{b}$$

**Definición 10.1.23** El plano paralelo a los vectores tangente y binormal,  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{b}$  en  $\mathbf{x}(t_0)$  se le denomina **plano rectificante** (fig. 10.2) a la curva, y su ecuación es

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t_0)) \cdot \mathbf{n} = 0$$

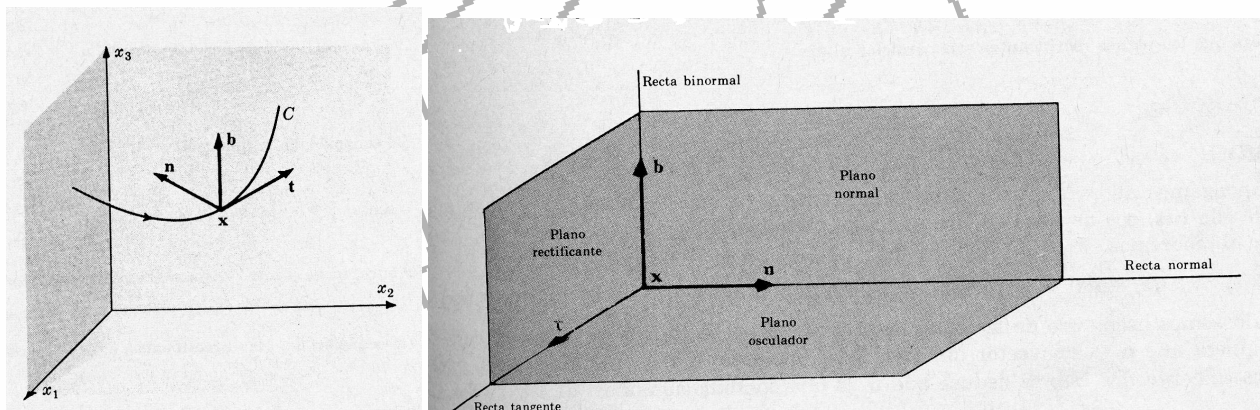


Figure 10.1: Triedro móvil

Figure 10.2: Planos característicos.

**Ejemplo 10.1.24** Para la hélice:  $\mathbf{x} = (a \cos t, a \sin t, bt)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  se tiene:

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (-a \sin t, a \cos t, b), \quad \mathbf{k} = \frac{-a}{a^2 + b^2} (\cos t, \sin t, 0), \quad \mathbf{n} = -(\cos t, \sin t, 0)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (b \sin t, -b \cos t, a)$$

$$\text{Plano rectificante: } (\mathbf{x} - \mathbf{x}(t_0)) \cdot \mathbf{n}(t_0) = 0 \implies x_1 \cos t_0 + x_2 \sin t_0 = 0 \quad \blacksquare$$

**Definición 10.1.25** Se le denomina **torsión** de la curva en  $\mathbf{x}(t)$  al escalar  $\tau(s)$  que verifica

$$\dot{\mathbf{b}} = -\tau(s) \mathbf{n}(s), \quad \text{o bien, } \tau = -\dot{\mathbf{b}}(s) \cdot \mathbf{n}(s)$$

**Ejemplo 10.1.26** Para la hélice:  $\mathbf{x} = (a \cos t, a \sin t, bt)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  se tiene:

$$\mathbf{n} = -(\cos t, \sin t, 0), \quad \mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (b \sin t, -b \cos t, a)$$

$$\dot{\mathbf{b}} = \frac{1}{a^2 + b^2} (b \cos t, b \sin t, 0), \quad \tau = -\dot{\mathbf{b}}(s) \cdot \mathbf{n} = \frac{b}{a^2 + b^2} \quad \blacksquare$$

**Propiedad 10.1.27** Dada la curva  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ , se verifica:

$$\tau = \frac{|(x', x'', x''')|}{|x' \times x''|^2} \quad ( , , ) \text{ es el producto mixto}$$

### 10.1.5 Fórmulas de Frènet.

**Teorema 10.1.28 (Fórmulas de Frènet-Serret).** Dada la curva  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ , se verifica:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{t}} &= \kappa \mathbf{n} \\ \dot{\mathbf{n}} &= -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b} \\ \dot{\mathbf{b}} &= -\tau \mathbf{n} \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{t}} \\ \dot{\mathbf{n}} \\ \dot{\mathbf{b}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

**Dem.:**  $\dot{\mathbf{n}} = \mathbf{b} \times \mathbf{t} + \mathbf{b} \times \dot{\mathbf{t}} = -\tau (\mathbf{n} \times \mathbf{t}) + \mathbf{b} \times (\kappa \mathbf{n}) = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}.$   $\blacksquare$

**Teorema 10.1.29** Toda curva  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  queda definida unívocamente por su curvatura y su torsión como funciones de la longitud de arco.

**Dem.:** Ver [Lipschutz(1971)] pág. 86.  $\blacksquare$

### 10.1.6 Ejercicios propuestos

Ejercicios de [Galindo et al.(2005)] números 4.1, 4.5, 4.6, 4.7, 8.1, 8.2, 8.3

Ejercicios de [Lipschutz(1971)] números 4.1, 2, 3, 5, 7, 8, 11, 13, 16, 32, 33 y 5.1, 9, 25

Ejercicios de [Palacios(2010)]

## 10.2 Geometría diferencial de superficies

### 10.2.1 Representación paramétrica.

Habitualmente, se llama superficie al conjunto de puntos que constituye la representación gráfica de una función continua  $z = f(x, y)$ , definida en un recinto  $U$  del plano  $Oxy$  (cf. [Martínez Salas(1975)]). De un modo más general,

**Definición 10.2.1** Se define también una superficie  $\Sigma$  dando un punto genérico  $P(x, y, z)$  de la misma, o lo que es igual, dando el vector  $\vec{OP}$  en función de dos parámetros  $u$  y  $v$ :

$$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Admitiremos que, al variar  $(u, v)$  en el recinto plano  $U$ , existen los vectores  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$  y  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$  (que supondremos aplicados en el punto  $P$ ), los cuales son funciones continuas y tales que

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \neq 0$$

Esta condición significa que dichos vectores son linealmente independientes en cada punto, o sea que el rango de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}$$

es 2.

Los puntos donde se verifican estas condiciones se llaman **ordinarios**. Los puntos donde el rango de  $A$  es menor que 2 son **puntos singulares**. Algunas veces la presencia de éstos se debe al sistema de coordenadas elegido.

**Definición 10.2.2** Llamaremos **curva coordenada o paramétrica** a cada una de las curvas sobre la superficie que resultan al considerar uno de los parámetros constante. Cada una de las curvas coordenadas está definida por el vector  $\mathbf{r}(u, v_0)$  o por el  $\mathbf{r}(u_0, v)$

Al variar el punto  $(u_0, v_0)$  en el dominio  $U$  resulta una malla de curvas coordenadas de forma que, en general, por cada punto de  $\Sigma$  pasan dos de ellas. Por eso,

**Definición 10.2.3** Llamaremos **coordenadas curvilíneas** a cada uno de los parámetros  $(u, v)$  que permiten definir la superficie.

**Ejemplo 10.2.4** Para la superficie esférica de radio  $R$  y centro el origen de coordenadas, definida por

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta, \phi) = (R \cos \theta \sen \phi, R \sen \theta \sen \phi, R \cos \phi)$$

donde  $\theta$  es la longitud y  $\phi$  es la colatitud, las curvas coordenadas son los paralelos,  $\phi$  constante, y los meridianos,  $\theta$  constante. ■

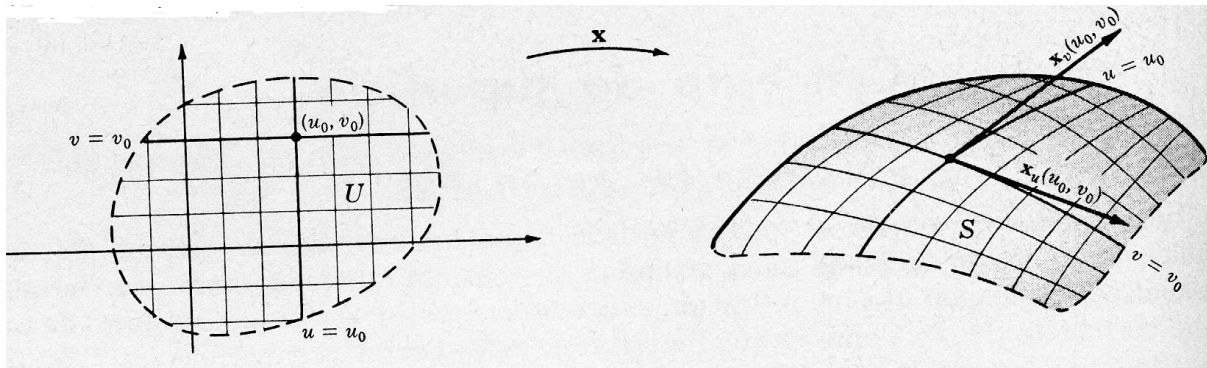


Figure 10.3: Superficie parametrizada

### 10.2.2 Plano tangente. Recta normal.

Sea  $r_0(x_0, y_0, z_0)$  un punto ordinario de la superficie  $\Sigma$ , al que corresponden las coordenadas curvilíneas  $(u_0, v_0)$ . Los vectores  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$  y  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$  son tangentes en el punto  $r_0$  a las curvas coordenadas  $v = v_0$  y  $u = u_0$ , representadas por  $\mathbf{r}(u, v_0)$  y  $\mathbf{r}(u_0, v)$ , respectivamente.

Cualquier otra curva sobre  $\Sigma$  que pase por  $\mathbf{r}_0$  se obtendrá expresando  $u$  y  $v$  como funciones de un solo parámetro  $t$ :

$$u = u(t), \quad v = v(t),$$

las cuales supondremos continuas, con derivadas no simultáneamente nulas en  $t = t_0$  y tales que  $u(t_0) = u_0, v(t_0) = v_0$ . La ecuación de esa curva será

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(t), v(t)),$$

y en el punto  $\mathbf{r}_0$  admitirá una recta tangente de vector direccional

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right)_{(u_0, v_0)} \dot{u}_0 + \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right)_{(u_0, v_0)} \dot{v}_0$$

contenido en el plano definido por  $\left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right)_{(u_0, v_0)}$  y  $\left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right)_{(u_0, v_0)}$ , ya que son linealmente independientes.

**Definición 10.2.5** *El plano que contiene la tangente a cualquier curva trazada sobre  $\Sigma$  que pase por  $\mathbf{r}_0$  se llama **plano tangente** a la superficie en dicho punto y su vector característico es el **vector normal**,  $\mathbf{N}$ , a la superficie.*

Su ecuación vectorial será:

$$\mathbf{x} = \mathbf{r}_0 + \lambda \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right)_{(u_0, v_0)} + \mu \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right)_{(u_0, v_0)}$$

**Definición 10.2.6** *La recta perpendicular al plano tangente se llama **recta normal** a la superficie en dicho punto. Su vector direccional es el vector normal.*

Su ecuación vectorial será:

$$\mathbf{x} = \mathbf{r}_0 + \lambda \mathbf{N}, \quad \mathbf{N} = \left( \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right)_{(u_0, v_0)} \times \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right)_{(u_0, v_0)} \right)$$

**Ejercicio 10.2.7** Hallar las curvas coordenadas y, en el punto  $(\theta_0, \phi_0) = (\pi/4, \pi/4)$ , el plano tangente y la recta normal a la superficie (elipsoide):

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta, \phi) = (a \cos \theta \sin \phi, b \sin \theta \sin \phi, c \cos \phi), \quad \text{o bien,} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

**Solución:**

El punto:  $\mathbf{r}(\pi/2, \pi/2) = (a/2, b/2, \sqrt{2}/2 c)$

Curvas coordenadas:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\pi/4, \phi) = \left( a \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \phi, b \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \phi, c \cos \phi \right)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta, \pi/4) = \left( a \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta, b \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta, c \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Tangente a las curvas coordenadas:

$$\mathbf{r}_\theta = (-a \sin \theta \sin \phi, b \cos \theta \sin \phi, 0) \Rightarrow \mathbf{r}_\theta(\pi/4, \pi/4) = (-a/2, b/2, 0)$$

$$\mathbf{r}_\phi = (a \cos \theta \cos \phi, b \sin \theta \cos \phi, -c \sin \phi) \Rightarrow \mathbf{r}_\phi(\pi/4, \pi/4) = (a/2, b/2, -c\sqrt{2}/2)$$

Ya que  $\mathbf{r}_\theta \cdot \mathbf{r}_\phi = (b^2 - a^2) \cos u \sin u \cos v \sin v$ , las curvas coordenadas son ortogonales en un punto genérico solo si  $a = b$ .

Vector normal:  $\mathbf{N} = \mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi = 1/4(-bc\sqrt{2}, -ac\sqrt{2}, -2ab)$

Ecuación plano tangente:  $(\mathbf{x} - (a/2, b/2, \sqrt{2}/2 c)) \cdot (-bc\sqrt{2}, -ac\sqrt{2}, -2ab) = 0$

Ec. recta normal:  $\mathbf{x} = (a/2, b/2, \sqrt{2}/2 c) + \lambda(-bc\sqrt{2}, -ac\sqrt{2}, -2ab)$ . ■

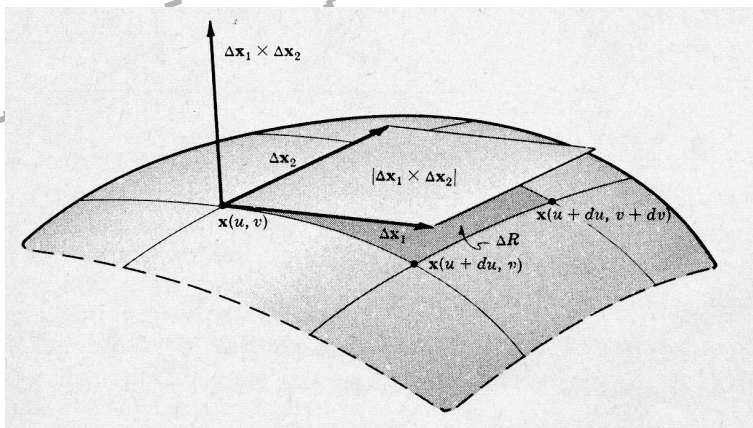


Figure 10.4: Plano tangente

### 10.2.3 Primera forma fundamental

Una relación  $\varphi(u, v) = 0$  entre las coordenadas curvilíneas determina una curva sobre la superficie. Dicha curva puede definirse también en forma paramétrica:

$$u = u(t), \quad v = v(t)$$

El vector  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$  en un punto  $\mathbf{r}(u, v)$  de la superficie, definido por

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_u \dot{u} + \mathbf{r}_v \dot{v}$$

es tangente a la curva y, por tanto, a la superficie. La ecuación anterior puede escribirse en forma independiente de la elección del parámetro:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv$$

Si la curva está dada por  $\varphi(u, v) = 0$ ,  $du$  y  $dv$  están relacionadas por

$$\varphi_u du + \varphi_v dv = 0$$

y el cociente  $dv/du = -\varphi_u/\varphi_v$  determina la dirección de la tangente.

La distancia entre dos puntos de la curva (cf. 10.1.2) se obtiene integrando

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$$

a lo largo de la curva. Al sustituir  $d\mathbf{r}$  por su expresión, resulta:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 \quad (10.1)$$

donde

$$E = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u \quad F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v, \quad G = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v$$

son funciones de  $u$  y  $v$ .

**Definición 10.2.8** La forma cuadrática definida en (10.1) se denomina **primera forma fundamental** de la superficie y se denotará por **I**.

Observése que por ser  $ds^2$  una longitud siempre es positiva, por lo que la primera forma fundamental es una forma cuadrática definida positiva. Por lo tanto, los elementos de la diagonal de la matriz asociada,  $E$  y  $G$ , así como su determinante,  $EG - F^2$  deben ser positivos.

A partir de la primera forma fundamental, **I**, se puede definir el ángulo  $\alpha$  entre dos direcciones tangentes a la superficie dadas por  $\frac{du}{dv}$  y  $\frac{\delta u}{\delta v}$ . Se tiene:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv, \quad \delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_u \delta u + \mathbf{r}_v \delta v$$

**Definición 10.2.9** Llamaremos **ángulo de dos direcciones tangentes a la superficie** al ángulo  $\alpha \in [-\pi, \pi]$  definido por

$$\cos \alpha = \frac{d\mathbf{r} \cdot \delta\mathbf{r}}{|d\mathbf{r}| |\delta\mathbf{r}|} = \frac{E du \delta u + F (du \delta v + \delta u dv) + G dv \delta v}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \sqrt{E \delta u^2 + 2F \delta u \delta v + G \delta v^2}}$$



**Propiedad 10.2.10 .**

- 1) La dos curvas son ortogonales si  $E du \delta u + F (du \delta v + \delta u dv) + G dv \delta v = 0$
- 2) El ángulo formado por las curvas coordenadas es:  $\cos \alpha = \frac{F}{\sqrt{EG}}$
- 3) Las curvas coordenadas son ortogonales si  $F = 0$

**Ejemplo 10.2.11** Para la esfera:  $r(\theta, \phi) = (a \operatorname{sen} \phi \cos \theta, a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, a \cos \phi)$ , resulta:  $E = a^2$ ,  $F = 0$ ,  $G = a^2 \cos^2 \theta$  y, por lo tanto, las curvas coordenadas (meridianos y paralelos) son ortogonales.

**10.2.4 Longitud de un arco y area de una superficie**

A partir de la definición de la primera forma fundamental, la **longitud** de una curva sobre la superficie está definida por:

$$s = \int_a^b \sqrt{E \frac{d^2 u}{dt^2} + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \frac{d^2 v}{dt^2}} dt$$

**Ejemplo 10.2.12** La curva sobre la esfera unidad  $\mathbf{r} = (\cos \theta \operatorname{sen} \phi, \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \cos \phi)$  definida por:  $e^\theta = \cotg(\pi/4 - t/2)$ ,  $\phi = \pi/2 - t$ ,  $0 \leq t \leq \pi/2$ , proporciona:

$$\mathbf{r}_\theta = (-\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \cos \theta \operatorname{sen} \phi, 0), \quad \mathbf{r}_\phi = (\cos \theta \cos \phi, \operatorname{sen} \theta \cos \phi, -\operatorname{sen} \phi)$$

$$E = \mathbf{r}_\theta \cdot \mathbf{r}_\theta = \operatorname{sen}^2 \phi, \quad F = \mathbf{r}_\theta \cdot \mathbf{r}_\phi = 0, \quad G = \mathbf{r}_\phi \cdot \mathbf{r}_\phi = 1$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\operatorname{sen}(\pi/2 - t)}, \quad \frac{d\phi}{dt} = -1$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{I} = \frac{\operatorname{sen}^2 \phi}{\operatorname{sen}^2(\pi/2 - t)} + 1, \quad \implies \quad s = \int_0^{\pi/2} \sqrt{2} dt = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \quad \blacksquare$$

Para definir el **área de una superficie**, tomemos una porción de la superficie limitada por las curvas paramétricas  $u$  y  $u + du$  de parámetro  $v$  y las curvas  $v$  y  $v + dv$  de parámetro  $u$ , como se ve en la figura 10.4. Como primera aproximación del área de dicho recinto tomamos el área del paralelogramo cuyos lados son los vectores  $\Delta \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_u du$  y  $\Delta \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_v dv$ , es decir,

$$\Delta \sigma = |\Delta \mathbf{r}_1 \times \Delta \mathbf{r}_2| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv = \sqrt{EG - F^2} du dv$$

En consecuencia

$$A = \iint_W \sqrt{EG - F^2} du dv$$

siendo  $W$  el subconjunto del dominio  $U$  que limita el trozo de superficie.

**Ejemplo 10.2.13** Para el toro:  $r(\theta, \phi) = ((b + a \operatorname{sen} \phi) \cos \theta, (b + a \operatorname{sen} \phi) \operatorname{sen} \theta, a \cos \phi)$ , resulta:

$$E = (b + a \operatorname{sen} \phi)^2, \quad F = 0, \quad G = a^2,$$

y, por lo tanto,

$$A = \int \int_{0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi} \sqrt{EG - F^2} d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{2\pi} (a(b + a \operatorname{sen} \phi) d\phi) \right] d\theta = 4\pi^2 ab \quad \blacksquare$$

### 10.2.5 Curvatura normal. Segunda forma fundamental.

La geometría de una superficie depende de dos formas cuadráticas diferenciales, la primera y la segunda formas fundamentales. Para definir la segunda forma fundamental hemos de considerar una curva  $C$  sobre la superficie que pase por el punto  $P = \mathbf{r}(u, v)$  y el vector curvatura de  $C$  en  $P$ , que viene dado (cf. 10.1.10) por

$$\kappa = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa_n + \kappa_g$$

**Definición 10.2.14**  $\kappa_n$  es la componente en la dirección del vector normal y se le llama **curvatura normal** y puede expresarse como

$$\kappa_n = \kappa_n \mathbf{N}.$$

$\kappa_g$  es la componente en la dirección de tangente a la superficie y se le llama **curvatura geodésica**.

**Propiedad 10.2.15**

$$\kappa_n = - \frac{(\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{N}_u) du^2 + (\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{N}_v + \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{N}_u) du dv + (\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{N}_v) dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}$$

**Dem.:**

De  $\mathbf{N} \cdot \mathbf{t} = 0$ , se obtiene derivando a lo largo de  $C$ :

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} \cdot \mathbf{N} = -\mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{ds} = -\frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{ds}, \text{ es decir } \kappa_n = -\frac{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{N}}{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}}$$

Teniendo en cuenta que

$$d\mathbf{N} = \mathbf{N}_u du + \mathbf{N}_v dv, \quad d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv,$$

resulta el enunciado. ■

**Definición 10.2.16** A la forma cuadrática

$$\mathbf{II} = e du^2 + 2f du dv + g dv^2$$

donde

$$e = -\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{N}_u, \quad f = -\frac{1}{2}(\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{N}_v + \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{N}_u), \quad g = -\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{N}_v$$

se le denomina **segunda forma fundamental** de la superficie.

Los coeficientes de la segunda forma fundamental también se pueden obtener en la forma siguiente:

$$e = \mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{N}, \quad f = \mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{N}, \quad g = \mathbf{r}_{vv} \cdot \mathbf{N}$$

**Ejemplo 10.2.17** Para la superficie  $\mathbf{r} = (u, v, u^2 - v^2)$ , se tiene:

$$\mathbf{r}_u = (1, 0, 2u), \quad \mathbf{r}_v = (0, 1, -2v), \quad \mathbf{r}_{uu} = (0, 0, 2), \quad \mathbf{r}_{vv} = (0, 0, -2)$$

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} (-2u, 2v, 1)$$

$$e = \frac{2}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}, \quad f = 0, \quad g = -\frac{2}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}$$

Consideremos un punto  $P = \mathbf{r}(u, v)$  sobre la superficie y otro punto próximo también sobre la superficie,  $Q = \mathbf{r}(u + du, v + dv)$ . La distancia de  $Q$  hasta el plano tangente a la superficie en  $P$  está dada por

$$d = \vec{PQ} \cdot \mathbf{N} = (\mathbf{r}(u + du, v + dv) - \mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{N} = d\mathbf{r} \cdot \mathbf{N} + \frac{1}{2} d^2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{N} + \dots,$$

después de utilizar el teorema de Taylor. Fácilmente (cf. [Lipschutz(1971)]) se prueba la siguiente

### Propiedad 10.2.18

$$\delta = \frac{1}{2} \mathbf{II} = \frac{1}{2} (e du^2 + 2f du dv + g dv^2)$$

define el **paraboloide osculador** a la superficie en un punto  $P$ .

La naturaleza de este paraboloide determina la naturaleza de la superficie en un entorno de  $P$ . De esta forma se pueden distinguir cuatro casos (ver figura 10.5):

- Caso elíptico:  $eg - f^2 > 0$
- Caso hiperbólico:  $eg - f^2 < 0$
- Caso parabólico:  $eg - f^2 = 0$
- Caso plano:  $e = 0, f = 0, g = 0$

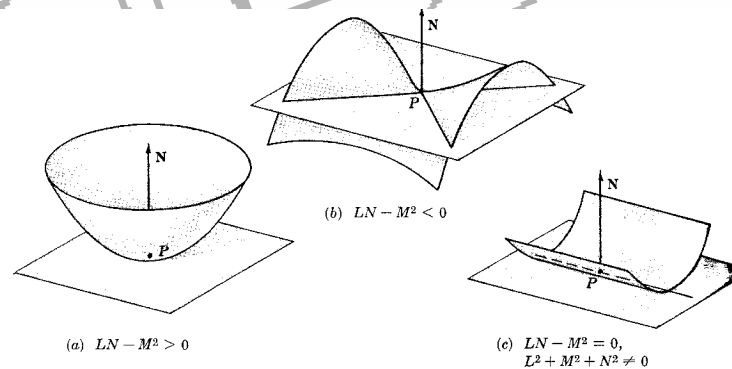


Figure 10.5: Clasificación de puntos de una superficie

### 10.2.6 Ejercicios propuestos

Ejercicios de [Lipschutz(1971)] números 8.1, 2, 3, 7, 8, 9, 11, 17, 18

Ejercicios de [Galindo et al.(2005)] números 4.15, 4.20, 4.21, 9.2, 9.3

Ejercicios de [Lipschutz(1971)] números 9.1, 2, 3, 7, 8, 9

Ejercicios de [Palacios(2010)]