Matemáticas II – Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales
N. Boal, M. Palacios, S. Serrano

Autoevaluación 4

1. Sean f y g aplicaciones lineales definidas de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con ecuaciones coordenadas respecto de la base canónica $Y = AX$ e $Y = BX$, respectivamente. Entonces, la matriz coordenada de $(g \circ f)^{-1}$ respecto de la base canónica:

   a) No existe.

   b) Es $A^{-1} B^{-1}$.

   c) Existe si A y B son regulares.

   d) Es $B^{-1} A^{-1}$.

2. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{bmatrix},$$

   entonces:

   a) No se puede aplicar el método de la potencia porque no hay un valor propio dominante.

   b) Se puede aplicar el método de la potencia aunque no haya una base de vectores propios.

   c) Al aplicar el método de la potencia a la matriz A se obtendría como solución una aproximación al valor propio $t = -1$.

   d) Al aplicar el método de la potencia a la matriz A^{-1} se obtendría como solución una aproximación al valor propio $t = -1$.

3. Sea A la matriz coordenada de un endomorfismo diagonalizable, g, cuyos valores propios son 0, 1 y -1, con multiplicidades algebraicas 2, 1 y 2, respectivamente. Entonces

   a) g es isomorfismo.

   b) dim Ker g=2.

   c) Los valores propios de $g \circ g$ son 0 y 1.

   d) dim Im g=4.

4. Sea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que rang $A = 2$, entonces

   a) $\lambda = 0$ es valor propio de A.

   b) $\dim S(0) = 1$.

   c) $m(0) = 1$.

   d) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es incompatible para todo $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

5. Sea $h \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^5)$ de ecuación coordenada respecto de la base canónica $Y = AX$, con polinomio característico: $x(x-1)(x-2)(x+1)^2$ y $\mathrm{rang}\,(A+I) = 3$.

    a) Como $\dim S(-1) \neq m(-1)$, A no es diagonalizable.

    b) $\mathrm{Im} h = S(1) \oplus S(2) \oplus S(-1)$.

    c) $\mathbb{R}^5 = \mathrm{Ker} h \oplus S(1) \oplus S(2) \oplus S(-1)$.

    d) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ no es compatible determinado.

6. Sea V un espacio vectorial real y $h \in \mathrm{End}(V)$ inyectivo. Si existe $0_v \neq v_1 \in V$ fijo y se sabe que $(x-2)^3$ divide al polinomio característico de h, entonces:

    a) $\lambda = 0$ es valor propio de h.

    b) $\lambda = 1$ es valor propio de h.

    c) $\lambda = 1$ es valor propio de h y $m(2) \leq \dim S(2)$.

    d) $\dim V = 3$.

Problema

Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calcula los valores propios de A y sus multiplicidades algebraica y geométrica.

2. Halla una base para cada uno de los subespacios fundamentales.

3. ¿Es A diagonalizable? En caso afirmativo, encuentra una base de $\mathbb{R}^4$ respecto de la cual la matriz semejante a la A sea una matriz diagonal D. Justifica que A y D son matrices semejantes.

4. Comprueba que la familia $\{v_i\}_{i=1}^4 = \{(-2,0,0,1), (0,-2,1,1), (1,0,1,0), (1,1,0,0)\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$ de vectores propios de A e indica cuál es la matriz semejante a A asociada a dicha base.

5. Calcula A^4, sin realizar el producto A.A.A.A.