Matemáticas II – Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales
N. Boal, M. Palacios, S. Serrano

Autoevaluación 3

1. Considera los espacios vectoriales reales V y W y sus bases $\{v_1, v_2, v_3\}$ y $\{w_1, w_2\}$, respectivamente. Se define la aplicación lineal $f : V \to W$ dada por

$$f(v_1 + v_2) = w_1 - 2w_2, \quad f(v_2) = w_1 + 2w_2, \quad f(v_3 - v_2) = 2w_1 + w_2.$$

Entonces:

   a) $f(v_1 + v_2 + v_3) = 2w_1 + w_2$.
   b) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + 3x_3, -4x_1 + 2x_2 + 3x_3)$.
   c) $\text{Ker} f = \mathbb{R}\langle -v_1 + v_2 - 4v_3\rangle$.
   d) La matriz coordenada de f respecto de las bases $\{v_i\}_{i=1}^3$ y $\{w_j\}_{j=1}^2$ es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal inyectiva entre dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$. Entonces

   a) $\dim \mathbb{K} < v_1, v_2, \ldots, v_r > = \dim \mathbb{K} < f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_r) >$, $\forall v_i \in V$.
   b) $\dim \text{Im } f = \dim V$.
   c) $\dim \text{Ker } f = \dim W$-$\dim V$.
   d) Si $\dim W = \dim V$ entonces f es isomorfismo.

3. Sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ tal que $\dim \text{Im } f = \dim V$. Entonces:

   a) $\{0_V\}$ es la única base de Ker f.
   b) f es suprayectiva.
   c) Si $V = W$ entonces Ker f e Im f son subespacios suplementarios.
   d) Si $\dim V < \dim W$ entonces f no puede ser suprayectiva.

4. Sea V un espacio vectorial real y $\{v_i\}_{i=1}^n$ base de V. Considera la aplicación lineal $f : V \to \mathbb{R}^n$ de ecuación coordenada $Y = AX$ respecto de $\{v_i\}_{i=1}^n$ base de V y $\{e_i\}_{i=1}^n$ base canónica de $\mathbb{R}^n$. Si $|A| \neq 0$ entonces:

   a) f no es inyectiva, pero sí es suprayectiva.
   b) $\dim V = \text{rang} A$.
   c) $\text{Im} f = \mathbb{R}\langle v_1, v_2, \ldots v_n\rangle$.
   d) f es isomorfismo coordenado.

5. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con ecuación coordenada respecto de la base canónica $\{e_i\}_{i=1}^3$ es $Y = AX$ con
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Entonces

   a) $\mathrm{Im}\ f = \mathbb{R}\langle e_1 + e_3, e_2\rangle$.
   b) $\mathrm{Ker}\ f = \mathbb{R}\langle e_1 - e_3\rangle$.
   c) $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}\ f \oplus \mathrm{Im}\ f$.
   d) $\dim V = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f$, pero $\mathrm{Ker} f$ e $\mathrm{Im} f$ no son suplementarios.

6. Sea $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ y $\{p_1, p_2, p_3\}$ una base de $\mathbb{R}_2[x]$ tal que
$$f(p_2 - p_1) = f(p_2); \qquad f(p_3 - p_2) = p_2; \qquad f(p_1 + p_2 + p_3) = -f(p_3).$$
Entonces

   a) $p_1 \in \mathrm{Ker}\ f$.
   b) $\mathrm{Ker}\ f = \mathbb{R} < p_1, p_2 - 2p_3 >$.
   c) $\mathrm{Im}\ f = \{\lambda\, p_2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
   d) $\mathrm{Im}\ f$ y $\mathrm{Ker}\ f$ son suplementarios.

Problema

Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cuya matriz coordenada respecto de las bases canónicas es
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Halla una base de $\mathrm{Ker}\ f$, de $\mathrm{Im}\ f$, de un suplementario de $\mathrm{Ker}\ f$ y otra de un suplementario de $\mathrm{Im}\ f$.

b) Analiza si f es inyectiva o suprayectiva.

c) Calcula la matriz coordenada D de f respecto de las bases $\{v_1, v_2, v_3\}$ y $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, respectivamente, siendo
$$v_1 = (1, -2, -2),\ v_2 = (1, -2, 1),\ v_3 = (-1, 0, 1)$$
$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

d) Calcula $f(v_1 + v_2 + v_3)$.

e) Obtén, si es posible, una base de $\mathbb{R}^3$ y otra de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, respecto de las cuales la matriz coordenada de f sea $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.