Matemáticas II – Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales
N. Boal, M. Palacios, S. Serrano

Autoevaluación 2

1. En $\mathbb{Q} \setminus \{\frac{1}{3}\}$ se define la operación

$$a\diamondsuit b = a + b - 3ab.$$

   a) $\diamondsuit$ es una operación binaria interna definida en $\mathbb{Q} \setminus \{\frac{1}{3}\}$.
   b) $\diamondsuit$ es una operación asociativa en $\mathbb{Q} \setminus \{\frac{1}{3}\}$.
   c) El 1 es el elemento neutro de $\diamondsuit$ en $\mathbb{Q} \setminus \{\frac{1}{3}\}$.
   d) Para cada $q \in \mathbb{Q} \setminus \{\frac{1}{3}\}$, existe q' tal que $q\diamondsuit q' = q'\diamondsuit q = 0$.

2. Sea $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ un sistema generador de V, espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, $S = \mathbb{K}\langle v_1, v_2, v_3\rangle$ y $T = \mathbb{K}\langle v_4, v_5\rangle$. Entonces:

   a) $V = S \oplus T$.
   b) $V = S + T$.
   c) $S + T = \mathbb{K}\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\rangle$.
   d) $S \cap T = \{0_V\}$.

3. Sean S y T subespacios vectoriales de V tal que $\dim V = \dim S + \dim T$. Entonces

   a) $V = S + T$.
   b) $S \oplus T$.
   c) $\dim V = \dim(S + T) + \dim(S \cap T)$.
   d) $S \cap T = \{0_V\}$.

4. Sea $\{u, v, w\}$ una familia libre del espacio vectorial real V, entonces:

   a) $\{u + v, v + w, w + u\}$ es libre.
   b) Si $V = \mathbb{R}\langle u, v, w\rangle$ entonces $\dim V = 3$.
   c) $\exists\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha\, u + \beta\, v + \gamma\, w = 0_V$.
   d) $V = \mathbb{R}\langle u\rangle \oplus \mathbb{R}\langle v\rangle \oplus \mathbb{R}\langle w\rangle$.

5. Sea $\{a_1, a_2, a_3\}$ una familia ligada del espacio vectorial real V. Entonces:

   a) $a_1 \in \mathbb{R}\langle a_2, a_3\rangle$.
   b) $\exists\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, no todos nulos, tal que $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = 0_V$.
   c) $\exists\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, todos no nulos, tal que $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = 0_V$.
   d) $\dim \mathbb{R}\langle a_1, a_2, a_3\rangle = 2$.

6. Sean $S = \mathbb{R}\langle E_1, E_2\rangle$ y $T = \mathbb{R}\langle E_1 + E_2 + E_3 + E_4\rangle$, siendo $\{E_i\}_{i=1}^4$ la base canónica de $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Entonces:

   a) S y T son suplementarios.

   b) $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = S + T$, pero la $S + T$ no es directa.

   c) $S \oplus T$, pero no son suplementarios.

   d) $S \cap T = 0_V$.

Problema

Se considera el espacio vectorial $V = \mathbb{R}_3[x]$ y los subconjuntos

$$\begin{aligned} S_1 &= \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \,/\, p(x) = p(-x)\,\}, \\ S_2 &= \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \,/\, p(0) = p(1)\,\}, \\ S_3 &= \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \,/\, p(0) = 1\,\}. \end{aligned}$$

Se pide:

1. Probar si S_1, S_2 y S_3 son o no subespacios vectoriales de $V = \mathbb{R}_3[x]$. En los casos afirmativos, hallar una base de cada uno de ellos.

2. Estudiar si $S_1 \oplus S_2$.

3. Dado el subespacio vectorial $T = \mathbb{R}\langle x,\, x - x^3,\, 2x + x^3\rangle$, analizar si S_1 y T son suplementarios.

4. Comprobar que $\{1,\, 1 + x, 1 - x + x^2,\, 1 + x^3\}$ es base de $V = \mathbb{R}_3[x]$ y hallar las coordenadas de $p(x) = 1 - 2x + x^2 - x^3$ respecto de esta base.