Matemáticas II – Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales
N. Boal, M. Palacios, S. Serrano

Autoevaluación 1

1. Si la matriz cuadrada A de orden n verifica $A^2 + 2A = 3I$, entonces

   a) A es regular.

   b) $|A^2 + 2A| = 3$.

   c) $|A|^2 + 2|A| = 3^n$.

   d) $A^{-1} = \frac{1}{3}(A + 2I)$.

2. Considera el sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ con $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, entonces

   a) Si $\overline{\mathbf{x}}$ y $\tilde{\mathbf{x}}$ son soluciones, entonces $\overline{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}$ también es solución.

   b) Si $\overline{\mathbf{x}}$ es solución y $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces $\alpha\overline{\mathbf{x}}$ es solución.

   c) Si $\overline{\mathbf{x}}$ y $\tilde{\mathbf{x}}$ son soluciones y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, entonces $\alpha\overline{\mathbf{x}} + \beta\tilde{\mathbf{x}}$ también es solución.

   d) La única solución es $\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$.

3. Dado el sistema incompatible $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, entonces

   a) A es singular.

   b) $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

   c) Si cambiamos una columna de A por el vector $\mathbf{b}$, la nueva matriz es regular.

   d) Si cambiamos $\mathbf{b}$ por una columna cualquiera de A, entonces el sistema es compatible.

4. Sea el sistema compatible determinado $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{x}^*$ la solución del sistema. Y sean B_J y $\mathbf{c}$ la matriz de iteración y el vector característico, respectivamente, del método de Jacobi para dicho sistema.

   a) Si el método no es convergente, entonces $B_J\mathbf{x}^* + \mathbf{c} \neq \mathbf{x}^*$.

   b) Si el método es consistente, entonces $B_J\mathbf{x}^* + \mathbf{c} \neq \mathbf{x}^*$.

   c) Si $B_J\mathbf{x}' + \mathbf{c} \neq \mathbf{x}'$, entonces $\mathbf{x}'$ no es solución del sistema.

   d) Por construcción del método de Jacobi, forzosamente se cumple que $B_J\mathbf{x}^* + \mathbf{c} = \mathbf{x}^*$.

5. Considera la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

 a) No se puede aplicar la eliminación gaussiana sin intercambio de filas porque aparece un pivote nulo.

 b) Como $|A| = 0$ no existe factorización LU.

 c) A no es regular pero admite factorización LU.

 d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

6. Sea la matriz cuadrada no nula A, y L y U las matrices de su factorización LU.

 a) Entonces A no puede tener ningún elemento nulo en la diagonal.

 b) A puede tener elementos nulos en la diagonal, pero a_{11} tiene que ser distinto de 0.

 c) $|A| = |U| \neq 0$.

 d) $A^{-1} = L^{-1}U^{-1}$.

Problema

Dada la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 2 & 3 & \alpha \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
y el vector de términos independientes
$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

1. Estudiar el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en función de α y calcular su solución cuando exista.

2. Estudiar para qué valores de α la matriz A tiene factorización LU. Hallarla cuando se pueda.

3. Estudiar para qué valores de α la matriz A tiene factorización de Cholesky. Obtenerla cuando exista.

4. ¿Se puede aplicar el método de Jacobi al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para algún valor de α?, ¿y el método de Gauss-Seidel?

5. ¿Existe algún intercambio de filas de la matriz A de modo que la nueva matriz sea diagonal dominante para algún valor de α?

6. Intercambiando las filas 1 y 3 de la matriz A, realizar dos iteraciones de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel para $\alpha = -1$ partiendo de $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Con lo que sabemos hasta ahora, ¿podemos asegurar la convergencia de alguno de los dos métodos?