Matemáticas II – Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales
N. Boal, M. Palacios, S. Serrano

Alumno. Apellidos y nombre:

Autoevaluación 0

1. Un labrador tiene un campo de 10000 m^2 de extensión. Quiere sembrar trigo, cebada y patatas. Para ello dispone de 445 euros y 155 Kg de abono. El precio de la simiente y del abono necesarios se recoge en la tabla siguiente:

	Trigo	Cebada	Patatas
Precio simiente en $\epsilon/100m^2$	5	3	8
Kg. abono/$100m^2$	2	1	5

   Cuántos m^2 de terreno debe sembrar de cada uno de los productos?

   (a) 500, 6000 y 3500,
   (b) el sistema lineal que resuelve el problema es compatible pero indeterminado,
   (c) los datos no son coherentes.
   (d) 3500, 6000 y 500,

2. La matriz ampliada M del sistema lineal $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es la siguiente:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

   Entonces, se puede decir que

   (a) la segunda ecuación representa un plano que pasa por el origen de coordenadas,
   (b) la segunda y la tercera ecuaciones definen una recta de vector director v = (-1,1,2),
   (c) el producto vectorial de los vectores (1,-1,1) y (3,-1,2) es (-1,1,2),
   (d) las tres ecuaciones representan planos que no se cortan en un punto.

3. La matriz ampliada M del sistema lineal $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

   se puede decir que

   (a) el punto P = (1,1,0) pertenece al plano definido por la primera ecuación y a la recta definida por la segunda y la tercera,

(b) la matriz de coeficientes tiene rango igual a 2,
(c) la distancia del punto P = (1,1,0) al plano definido por la segunda ecuación es 1,
(d) el sistema es compatible determinado.

4. Dada la matriz M siguiente:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

se puede decir que

(a) el volumen del paralelepípedo definido por las columnas de M es -5,
(b) el determinante de la matriz M vale lo mismo que el de la matriz,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

(c) el producto mixto de los vectores columnas de M vale lo mismo que el de sus vectores fila,
(d) el producto mixto de los vectores columna de M vale -5.

5. Se considera el sistema lineal $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha\, x_2 + 7x_3 + 8x_4 & = & 0 \\ \beta\, x_3 + 6x_4 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = & 0 \\ 5x_3 + 6x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Entonces, se puede decir que

(a) el sistema es incompatible independientemente del valor de α y β,
(b) el sistema es compatible solo si $\alpha \neq 0$,
(c) el sistema es compatible determinado para $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 5$,
(d) el sistema es incompatible para $\alpha = 0$ y $\beta = 5$.

6. Problema

Se considera el sistema de ecuaciones $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 5-\alpha \\ -5/2 \end{pmatrix}$$

1. Se puede escribir b como combinación lineal de los vectores columna de A?. Explíquelo.

2. Discuta el sistema en función de los valores de α, es decir, calcule el rango de la matriz A y el de la matriz ampliada y aplique el teorema de Rouché-Fröbenius.

3. Por qué destacaron Rouché y Fröbenius? (Búsquelo en "http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/")

4. Resuelva el sistema en los casos posibles y exprese la solución en la forma:
vectorconstante + parámetro 1 * vectorconstante1 + parámetro 2 * vectorconstante2

▪ Eval_0 Ejerc.1

```
x = {t, c, p} = {3500, 6000, 500};
```

```
R = {{1, 1, 1}, {5, 3, 8}, {2, 1, 5}};  R // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

```
b = R.x
```

```
{10 000, 39 500, 15 500}
```

```
ab = Join[Transpose[R], {b}] // Transpose
```

```
{{1, 1, 1, 10 000}, {5, 3, 8, 39 500}, {2, 1, 5, 15 500}}
```

```
RowReduce[ab]
```

```
{{1, 0, 0, 3500}, {0, 1, 0, 6000}, {0, 0, 1, 500}}
```

▪ Eval_0 Ejerc.2

```
u2 = {1, -1, 1}; u3 = {3, -1, 2}; (* Vectores caracteristicos de los planos *)
```

```
v = Cross[u2, u3] (* Vector director de la recta *)
```

```
{-1, 1, 2}
```

```
M = {{2, 1, 3, 3}, {1, -1, -1, 0}, {3, -1, 2, 2}};  RowReduce[M]
```

```
{{1, 0, 0, 1}, {0, 1, 0, 1}, {0, 0, 1, 0}}
```

```
M11  = Take[M, {1, 3}, {1, 3}]
```

```
{{2, 1, 3}, {1, -1, -1}, {3, -1, 2}}
```

```
Det[M11]
```

```
-5
```

Luego el sistema es compatible determinado; los tres planos se cortan en un punto.

▪ Eval_0 Ejerc.3

```
M // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

El punto P = (1,1,0) verfica la primera ecuación.
Tambien verifica la segunda y la tercera.

dPP2 = d (P, plano)

```
dPP2 =  (1 - 1 +  0) / Sqrt[1^2 + (-1)^2 + 1^2]
```

```
0
```

El punto pertenece al plano, luego su distancia es nula..

```
u = M11; i = 2; j = 1; ele = u[[i, j]] / u[[j, j]];
u[[i]] = u[[i]] - ele * u[[j]]; u // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

```
i = 3; j = 1; ele = u[[i, j]] / u[[j, j]]; u[[i]] = u[[i]] - ele * u[[j]]; u // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

```
i = 3; j = 2; ele = u[[i, j]] / u[[j, j]]; u[[i]] = u[[i]] - ele * u[[j]]; u // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Luego el rango de A es 3.

Luego el sistema es compatible determinado y los tres planos se cortan en un punto.

Eval_0 Ejerc. 4

El volumen es el módulo del determinante de M, es decir, V = | det M | = | -5 | = 5

La matriz se ha obtenido haciendo operaciones elmentales sobre las filas de M; en concreto, se le han sumado la primera y la segunda multiplicadas por algún número; por lo tanto, tienen el mismo determinante

Tanto el producto mixto de los vectores columnas de M como el de sus filas vale lo mismo que su determinante; luego son iguales.

El producto mixto de los vectores columnas de M vale lo mismo que su determinante, es decir, det M = -5

Eval_0 Ejerc. 5

Por ser sistema lineal homogeneo siempe es compatible.

Será compatible determinado si el rango de A, rg A = 4.

```
ClearAll[a, b]; A = {{0, a, 7, 8}, {0, 0, b, 6}, {1, 2, 3, 4}, {0, 0, 5, 6}}; A // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 7 & 8 \\ 0 & 0 & b & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Si a = 0, b = 5, el rango de A, rg A < 4.

Si a =/= 0, b =/= 5, el rango de A, rg A = 4. y el sistema es compatible determinado.

Eval_0 Problema

Que el sistema es compatible equivale a que b es combinación lineal de las colunas de A.
Por lo tanto, habrá que discutir el sistema.

```
A = {{4, -1, 0, 0, 5 / 2}, {-1, alf, 1, 0, 5 - alf}, {0, 1, 5, -2, -5 / 2}}; A // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ -1 & \text{alf} & 1 & 0 & 5-\text{alf} \\ 0 & 1 & 5 & -2 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ -1 & \text{alf} & 1 & 0 & 5-\text{alf} \\ 0 & 1 & 5 & -2 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

```
u = A; i = 2; j = 1; ele = u[[i, j]] / u[[j, j]]; u[[i]] = u[[i]] - ele * u[[j]]; u // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4}+\text{alf} & 1 & 0 & \frac{45}{8}-\text{alf} \\ 0 & 1 & 5 & -2 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4}+\text{alf} & 1 & 0 & \frac{45}{8}-\text{alf} \\ 0 & 1 & 5 & -2 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

```
aux = u[[2]]; u[[2]] = u[[3]]; u[[3]] = aux; u // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 5 & -2 & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4}+\text{alf} & 1 & 0 & \frac{45}{8}-\text{alf} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 5 & -2 & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4}+\text{alf} & 1 & 0 & \frac{45}{8}-\text{alf} \end{pmatrix}$$

```
i = 3; j = 2; ele = u[[i, j]] / u[[j, j]];
u[[i]] = u[[i]] - ele * u[[j]]; u // Simplify // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 5 & -2 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{9}{4}-5\,\text{alf} & 2\left(-\frac{1}{4}+\text{alf}\right) & 5+\frac{3\,\text{alf}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 5 & -2 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{9}{4}-5\,\text{alf} & 2\left(-\frac{1}{4}+\text{alf}\right) & 5+\frac{3\,\text{alf}}{2} \end{pmatrix}$$

Discusión: Los elementos (3,3) y (3,4) no pueden anularse simultaneamente, por lo que siempre (para todo alf) rg A = 3 = rg A|b ==> sistema compatible determinado, solución única.

Rouché wrote several textbooks including Traité de géométrie élémentaire (written jointly with Ch De Comberousse) (1874), Éléments de Statique Graphique (1889), Coupe des pierres : précédée des principes du trait de stéréotomie (written jointly with Charles Brisse) (1893), and Analyse infinitésimale à l'usage des ingénieurs (1900-02)
Rouché s theorem which he published in the Journal of the École Polytechnique 39 (1862).
If f (z) and g (z) are two complex functions which are regular within and on a closed contour C, on which f (z) does not vanish and also | g (z) | < | f (z) | then f (z) and f (z) + g (z) have the same number of zeros within C.

Rouché paper Sur la discussion des equations du premier degré

Frobenius had made major contributions:

1. On the development of analytic functions in series.
2. On the algebraic solution of equations, whose coefficients are rational functions of one variable.
3. The theory of linear differential equations.
4. On Pfaff's problem.
5. Linear forms with integer coefficients.
6. On linear substitutions and bilinear forms...
7. On adjoint linear differential operators...
8. The theory of elliptic and Jacobi functions...
9. On the relations among the 28 double tangents to a plane of degree 4.
10. On Sylow's theorem.
11. On double cosets arising from two finite groups.
12. On Jacobi's covariants...
13. On Jacobi functions in three variables.
14. The theory of biquadratic forms.
15. On the theory of surfaces with a differential parameter.

```
alf = 9 / 20; x1 = LinearSolve[Take[u, {1, 3}, {1, 4}], Take[u, {1, 3}, {5}]] // Flatten
```

$$\left\{\frac{227}{32}, \frac{207}{8}, 0, \frac{227}{16}\right\}$$

```
alf = 1 / 4; x1 = LinearSolve[Take[u, {1, 3}, {1, 4}], Take[u, {1, 3}, {5}]] // Flatten
```

$$\left\{-\frac{215}{32}, -\frac{235}{8}, \frac{43}{8}, 0\right\}$$

```
(* alf distinto de 9/20 y 1/4 *)
ClearAll[alf];
Solve[u[[3]].{y1, x2, x3, x4, 1} == 0, x3]
```

$$\left\{\left\{x3 \to \frac{2\,(10 + 3\,\text{alf} - x4 + 4\,\text{alf}\,x4)}{-9 + 20\,\text{alf}}\right\}\right\}$$

```
{y1, x2, x3, x4} /. %
```

$$\left\{\left\{y1, x2, \frac{2\,(10 + 3\,\text{alf} - x4 + 4\,\text{alf}\,x4)}{-9 + 20\,\text{alf}}, x4\right\}\right\}$$

```
Solve[u[[2]].({y1, x2, x3, x4, 1} /. %9 // Flatten) == 0, x2]
```

$$\left\{\left\{x2 \to \frac{-245 + 40\,\text{alf} - 16\,x4}{2\,(-9 + 20\,\text{alf})}\right\}\right\}$$

```
({y1, x2, x3, x4, 1} //. %9 //. %11 // Flatten)
```

$$\left\{y1, \frac{-245 + 40\,\text{alf} - 16\,x4}{2\,(-9 + 20\,\text{alf})}, \frac{2\,(10 + 3\,\text{alf} - x4 + 4\,\text{alf}\,x4)}{-9 + 20\,\text{alf}}, x4, 1\right\}$$

```
Solve[u[[1]].({y1, x2, x3, x4, 1} //. %9 //. %11 // Flatten) == 0, y1]
```

$$\left\{\left\{y1 \to \frac{-50 - 15\,alf - 4\,x4}{2\,(-9 + 20\,alf)}\right\}\right\}$$

```
sol = Flatten[({y1, x2, x3, x4} //. %9 //. %11 //. %13), 3]
```

$$\left\{\frac{-50 - 15\,alf - 4\,x4}{2\,(-9 + 20\,alf)},\ \frac{-245 + 40\,alf - 16\,x4}{2\,(-9 + 20\,alf)},\ \frac{2\,(10 + 3\,alf - x4 + 4\,alf\,x4)}{-9 + 20\,alf},\ x4\right\}$$

$$\mathbf{sol} = \left\{\frac{-50 - 15\,alf}{2\,(-9 + 20\,alf)},\ \frac{-245 + 40\,alf}{2\,(-9 + 20\,alf)},\ \frac{2\,(10 + 3\,alf)}{-9 + 20\,alf},\ 0\right\} +$$
$$x4\left\{\frac{-4}{2\,(-9 + 20\,alf)},\ \frac{-16}{2\,(-9 + 20\,alf)},\ \frac{4\,alf}{-9 + 20\,alf},\ 1\right\};$$