## 1.II.4 Métodos basados en técnicas de optimización

**Bibliografía**

Kincaid-Cheney, pg. 209 y ss.
Conde-Winter, pg. 247 y ss.
Bulirsch-Stoer, pg. 572 y ss.

### 1. Problema de optimización asoc.

A matriz n x n, simétrica def. posit.

A x = b $\Longleftrightarrow$ min J(x), siendo

$$J : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$J(x) = \frac{1}{2} x^T A x - x^T b$$

A def. posit. $\Rightarrow$ J es convexo (estricto)

$$J(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda J(x) + (1-\lambda) J(y)$$

luego, existe un solo mínimo (la solución del sist. lineal)

♠ **Métodos de descenso**:

Dado un vector inicial $x^{(0)}$, elegir iterativamente una dirección $v_k$ y un incremento $t_k$ que minimice el valor de $J(x^{(k)} + t_k v_k)$



### 2. Método del gradiente.

Elegir:

• $v_k = -grad(J(x) = b - Ax^{(k)}$, máx. desc.

• $t_k$ tal que $J(x^{(k+1)} = \min J(x^{(k)} + t_k v_k)$

$$\Longrightarrow \qquad t_k = \frac{v_k^T v_k}{v_k^T A v_k}$$

♠ **Algoritmo**

- Input: $x^{(0)}$ arbitrario, Tol
- $v_k = b - Ax^{(k)}$
- $t_k = \dfrac{v_k^T v_k}{v_k^T A v_k}$
- $x^{(k+1)} = x^{(k)} + t_k v_k$
- crit. de parada: $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq$ Tol

♠ Observaciones:

a) Sucesivas direc. $v_k$ no tienen relación
b) Suele ser lentamente convergente.

♠ Expresión del error:

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \beta^k \|x^{(0)} - x^*\|, \quad \beta = \frac{K_2(A) - 1}{K_2(A) + 1}$$



### 3. Método del gradiente conjugado.

• Elegir: $v_0 = b - Ax^{(0)} = -grad(J(x^{(0)})$ (máximo descenso)

$t_0$ como en met. gradiente.

• $v_k$ comb. lineal de $r_k = b - Ax^{(k)}$ y de $v_{k-1}$ que sea A-ortogonal a $v_{k-1}$,
es decir,

$$v_k = r_k + \alpha_{k-1} v_{k-1}, \; \alpha_{k-1} = -\frac{r_k^T A v_{k-1}}{v_{k-1}^T A v_{k-1}}$$

• $x^{(k+1)} = x^{(k)} + t_k v_k$, con $t_k = \dfrac{v_k^T r_k}{v_k^T A v_k}$

**Teorema**.

i) $r_i^T v_j = v_j^T r_i = 0, \quad 0 \leq j < i \leq N_0$
ii) $r_i^T r_i = r_i^T v_i = v_i^T r_i, \quad 0 \leq i \leq N_0$
iii) $v_i^T A v_j = 0, \quad 0 \leq i < j \leq N_0$
$v_i^T A v_i > 0, \quad 0 \leq i < N_0$
iv) $r_i^T r_j = 0, \quad 0 \leq i < j \leq N_0$

Resultado: $\exists N_0 \leq n$ tal que $v_{N_0} = 0 \quad \Rightarrow$ convergencia en $N_0$ iteraciones.



### Algoritmo

- Input: $x^{(0)}$ arbitrario, Tol, Nmax
- $d_0 = b - Ax^{(0)}$
- Para k = 0,1,2, ...
  - $t_k = \dfrac{r_k^T r_k}{v_k^T A v_k}$
  - $x^{(k+1)} = x^{(k)} + t_k v_k$
  - $r_{k+1} = b - Ax^{(k+1)} = r_k - t_k A v_k$
  - $\alpha_k = -\dfrac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k}$
  - $v_{k+1} = r_{k+1} + \alpha_k v_n$
  - test converg.: $\|r_{k+1}\| \leq$Tol
  - test parada: k $\leq$ Nmax
  - resultados

## Gradiente conjugado con precondicionamiento

- acelerar la convergencia
- disminuir la influencia de los errores de redondeo
- Resolver: $Gw = c$ con $w = Mx$ y $c = M^{-1}b$
  problema asociado al funcional
  $J(x) = \bar{J}(w) = \frac{1}{2}w^T G w - c^T w$
  con la idea de que: $cond_2(G) < cond_2(A)$
- Elegir $M$ tal que $cond_2(M^{-1}A) < cond_2(A)$
- Elegir $M$ que no implique realizar muchas operaciones
- Elección basada en la factorización de $A$

## Gradiente conjug. matrices no simétricas definidas positivas

- Ecuación normal
- Error mínimo
- Residuo mínimo
- Doble gradiente conjugado