1.II.3 Métodos iterativos
(cf. Gasca, Burden)

1. Métodos iterativos lineales: consistencia, convergencia, construcción.

- Concepto, consistencia, convergencia

$$x^{(m+1)} = Bx^{(m)} + c$$

Teor.: convergencia $\Longleftrightarrow$ consistencia + $\rho(B) < 1$

- Construcción de métodos iterativos
metodo lineal convergente $\Longrightarrow$
A = M - N, M regular
- Estabilidad
influencia de perturbaciones

$$\|\tilde{x} - x\| \leq k \sup_j \|\rho^{(j)}\|$$

- Velocidad de convergencia:

$$R(B^m) = -log\|B^m\|^{1/m}$$

- Cota del error:

$$\|x^{(m)} - x\| \leq \frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \|x^{(m)} - x^{(m-1)}\|$$

2. Métodos de Jacobi, Gauss-Seidel y relajación.

- Definición, ejemplo, algoritmo
A = D - L - U = M - N con
– D, diagonal, $a_{ii} \neq 0, i = 1(1)N$
– L, triang. infer. estricta
– U, triang. super. estricta

– Jacobi, M = D, N = L + U
– Gauss-Seidel, M = D - L, N = U
– Relajación (SOR), M $=\frac{1}{\omega}$ D - L, N = $\frac{1-\omega}{\omega}$ D + U, $\omega \neq 0$

Algoritmo de Jacobi

(a) input data A, b, x inicial, Tol, Nmax
(b) k=1
(c) Do d) a g) while $k \leq Nmax$
(d) For i=1(1)n, y(i) = (b(i) - $\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \dfrac{a(i,j)x(j)}{a(i,i)}$
(e) Si $\sum_{j=1}^{n} (y(j) - x(j))^2 < Tol^2$, resultados
(f) k = k+1

(g) For i=1(1)n, x(i) = y(i)
(h) Stop, k > Nmax

3. Resultados de convergencia.

- Matrices estrict. diagonal dominantes
Gauss-Seidel y Jacobi son convergentes

$\rho(B_J) \leq K$, y $\rho(B_{GS}) \leq K$, siendo

$$K = max\{\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{\|a_{ij}\|}{\|a_{ii}\|} < 1$$

- Matrices simétricas definidas posit.

Teor.: A simétrica y $a_{ii} > 0, \quad \forall i$,
G.-Seidel converge $\Longleftrightarrow$ A defin. posit.

Teor.: A simétr., D+L+U def. posit.,
Jacobi converge $\Longleftrightarrow$ A defin. posit.

- Matrices tridiagonales

Teor.: i) $\rho(B_{GS}) = \rho(B_J)^2$
ii) ambos convergen o divergen (G-S más rápido)

- Convergencia del mét. de relajación (SOR)

a. $\rho(B_\omega) \geq |\omega - 1|$
b. SOR puede converger si $0 < \omega < 2$
c. A estrict. diag. domin. y $0 < \omega \leq 1 \Longrightarrow$ SOR converge
d. A simetr., real, $a_{ii} > 0, \forall i$, entonces: SOR conv. $\Longleftrightarrow$ A def. posit., $0 < \omega < 2$
e. A tridiag. simet. def. pos. $\Longrightarrow$
i) J, GS y SOR conv
ii) $\omega_{opt} = \dfrac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(B_J)^2}}$