

1.II Resolución numérica de sistemas de ecuaciones lineales

1.II.1 Preliminares

1. Matrices especiales. Dominancia diagonal.

- triangulares
- diagonales en banda
- por bloques
- huecas

Dominancia diagonal.

$$\|a_{ii}\| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n \|a_{ij}\|, \quad \forall i$$

Teorema 1 .- *A* matriz cuadr. domin. diagon. estrict. \implies no-singular

2. Almacenamiento de matrices

En banda, por bloques, huecas.

17

3. Valores y vectores propios. Radio espectral.

Revisión de Álgebra.

Definiciones y ejemplos. $N(\lambda, m)$

Teorema de Schur

Teorema de Jordan

Teorema 2 .- *A* matriz cuadr.

$$A^r \rightarrow 0 \text{ si } r \rightarrow \infty \Leftrightarrow \rho(A) < 1$$

4. Matriz simétrica, definida positiva

Revisión de Álgebra.

Definiciones y ejemplos.

Teorema 3 .- Una matriz simétrica, diag. domin. es defn. positiva

5. Matrices ortogonales

Revisión de Álgebra.

Definiciones y ejemplos.

18

6. Normas vectorial y matricial.

- Definición norma vectorial. Ejemplos.
- Equivalencia de normas.
- Norma matricial.
- Normas compatibles. Norma inducida. Ejemplos.
- Ejercicios

Teorema 4 .- Dada norma matric. \implies existen normas vector. compatibles

Teorema 5 .- \forall norma matric.:

$$\rho(A) \leq \|A\|, \quad \forall \text{ norma inducida}$$

Teorema 6 .- $\forall A$ cuadrada:

$$\rho(A) = \inf \|A\|$$

Teorema 7 .-

1. Si $\|B\| < 1 \implies I + B$ es regular y

$$\|(I + B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}.$$

2. Si $I + B$ es singular $\implies \|B\| \geq 1$

19

7. Convergencia de sucesiones de matrices

Definición.

$$v_k \longrightarrow v^* \Leftrightarrow \lim \|v_k - v^*\| = 0$$

Teorema 8 .- Son equivalentes las proposiciones siguientes:

1. $\lim A^k = 0$ (matriz convergente)
2. $\lim A^k v = 0, \quad \forall v$
3. $\rho(A) < 1$
4. $\|B\| < 1$, para alguna norma matricial subordinada.

20

8. Métodos directos e iterativos

- Métodos directos

Solución exacta en número finito de operac. elementales

- número de operaciones elementales
- almacenamiento de la matriz de coeficientes

- Métodos iterativos

Solución como límite de una sucesión de soluciones aproximadas

- condiciones de convergencia
- velocidad de convergencia
- error en la n-ésima iteración
- procedimiento de parada
- necesidades de memoria

- Ventajas met. iterativos vs. met. directos

- mayor eficiencia sistemas orden elevado
- fácil implementación
- rápida solución poco aproximada
- facilidad de almacenamiento, en ocasiones

- Desventajas met. iterativos vs. met. directos

- número de operaciones no predecible
- eficiencia puede depender de la elección de parámetros