9 Resolución numérica de PVI.

Ejercicio 9.1 .- Construir el método de Taylor de orden 4 para la resolución numérica del problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = 1 + y^2(t) - t^3, & t \in [0,2] \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Ejercicio 9.2 .- Construir el método de Taylor de orden 5 para la resolución numérica del problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) + e^t + t\,y(t), & t \in [1,2] \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Ejercicio 9.3 .- Los métodos numéricos para resolver problemas de valor inicial también se pueden utilizar para calcular integrales.

i) Demostrar que todo problema de valor inicial de la forma

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [t_0, T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

es equivalente a la ecuación integral

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds$$

ii) Comprobar que se puede calcular

$$\int_0^{0.1} e^{-s^2}\, ds$$

resolviendo el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = e^{-t^2}, & t \in [0, 0.1] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

iii) Aplicar el método Runge-Kutta de orden 4 (RK4) con paso h = 0.1 para aproximar el valor de la integral dada en ii).

Ejercicio 9.4 .- Comprobar que cuando se aplica el método Runge-Kutta de orden 4 (RK4) para resolver (en un paso) el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = f(t), & t \in [a,b] \\ y(a) = 0 \end{cases}$$

es equivalente a la fórmula de Simpson para aproximar la integral

$$\int_a^b f(t)\, dt$$

Ejercicio 9.5 .- Obtener su tabla de coeficientes y estudiar el orden de consistencia de los siguientes métodos:

a) Trapecio: $y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}[f(y_n) + f(y_{n+1})]$

b) Heun: $y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}[f(t_n, y_n) + f(t_n + h, y_n + hf(t_n, y_n))]$

c) Euler modificado: $y_{n+1} = y_n + h\, f(t_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2} f(t_n, y_n))$

d) El método de un paso: $y_{n+1} = y_n + h\, \phi(t_n, y_n; h)$,

siendo $\phi(t, y; h) = (1 - \alpha)\, f(t, y) + \alpha\, f(t + \dfrac{h}{2\alpha}, y + \dfrac{h}{2\alpha} f(t, y)), \quad \alpha \neq 0$

Ejercicio 9.6 .- Considerar el siguiente método: $y_{n+1} = y_n + h\, \phi(t_n, y_n; h)$ siendo $\phi = \dfrac{2}{9}k_1 + \dfrac{3}{9}k_2 + \dfrac{4}{9}k_3$, donde:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n) \\ k_2 &= f(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 &= f(t_n + \frac{3}{4}h, y_n + (\frac{3}{4} - \alpha)hk_2 + \alpha hk_3) \end{aligned}$$

para la resolución del PVI:

$$y'(t) = f(t, y), \quad 0 < t < b, \quad y(0) = y_0$$

a) Escribir su tabla de coeficientes

b) Estudiar el orden del método según los valores de α.

Ejercicio 9.7 .- Se llama método Runge-Kutta de Gill al método que viene dado por la tabla de coeficientes

0	0			
1/2	1/2			
1/2	$(\sqrt{2}-1)/2$	$(2-\sqrt{2})/2$		
1	0	$-\sqrt{2})/2$	$(2+\sqrt{2})/2$	
	1/6	$(2-\sqrt{2})/6$	$(2+\sqrt{2})/6$	1/6

Comprobar que este método es de orden 4 y escribir las ecuaciones que definen al método.

Ejercicio 9.8 .- Considerar la tabla Runge–Kutta

0	0			
1/4	1/4			
2/3	α	2/3-α		
	$\hat{b}_1$	$\hat{b}_2$	0	(orden 2)
	b_1	b_2	b_3	(orden 3)

i) Hallar el valor de α y de los parámetros b_i, $\hat{b}_i$ de manera que se obtenga un par encajado de órdenes 3(2).

ii) Calcular la función de amplificación de ambos métodos y probar que el intervalo de estabilidad absoluta de cualquiera de ellos contiene a $[-2, 0]$.

iii) Para la integración del problema de valor inicial $y' = -10(y-t)+1$, $y(0)=0$, calcular el paso de integración de manera que la integración numérica de este problema sea estable.

Ejercicio 9.9 .- Construir los pares de métodos encajados de órdenes 1 y 2 que son de la forma

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & 1 & b_2 \\ \hline & b_1^* & b_2^* \end{array}$$

Ejercicio 9.10 .- Calcular la función de estabilidad para los siguientes métodos:

i) El método RK4

ii) El método de HEUN

iii) El método de RUNGE y determinar el intervalo de estabilidad absoluta

iv) El método de EULER y determinar el intervalo de estabilidad absoluta

Ejercicio 9.11 .- Se considera el método Runge-Kutta definido por la tabla siguiente:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ 2/3 & a_{21} & a_{22} \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array}$$

a) Determinar los coeficientes para que tenga orden tres.

b) Calcular la función de estabilidad para el método obtenido en el apartado anterior. A la vista de los resultados, ¿se podría afirmar que el método es A-estable?.

c) Calcular el intervalo de estabilidad absoluta del mencionado método.

Ejercicio 9.12 .- Estudiar el orden alcanzado y calcular la función de estabilidad y el intervalo de estabilidad para cada uno de los siguientes métodos implícitos:

$$\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array}, \qquad \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ \hline & 1/4 & 3/4 \end{array}$$

Ejercicio 9.13 .-

a) Estudiar el orden alcanzado por los siguientes métodos implícitos:

$$\begin{array}{c|cc} \alpha & \alpha & 0 \\ 1-\alpha & 1-2\alpha & \alpha \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}, \qquad \begin{array}{c|cc} \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

b) Calcular la función de estabilidad y el intervalo de estabilidad absoluta para cada uno de ellos

c) Comprobar que, cuando se aplican estos métodos, con $\alpha = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{6}$, para resolver (en un paso) el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = f(t), \quad t \in [a, b] \\ y(a) = 0, \end{cases}$$

son equivalentes a la fórmula de cuadratura de Gauss-Legendre con 2 nodos (x_0, x_1) para aproximar la integral

$$\int_a^b f(t)\, dt$$