8 Derivación e integración numérica.

Ejercicio 8.1 .- Utilizando desarrollos de Taylor deducir el término del error para la fórmula

$$f''(x) \simeq \frac{f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h)}{h^2}.$$

Ejercicio 8.2 .- Utilizando desarrollos de Taylor deducir el término del error para las siguientes aproximaciones de la derivada primera:

$$f'(x) \simeq \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h}$$

$$f'(x) \simeq \frac{f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)}{12h}$$

y averiguar cuál de ellas es más exacta.

Ejercicio 8.3 .- Demostrar que si la derivada segunda se aproxima por la fórmula

$$f''(x) \simeq \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

el error admite un desarrollo en serie de la forma $a_2h^2 + a_4h^4 + a_6h^6 + \ldots$ Aplicar dos pasos del proceso de extrapolación de Richardson a esta aproximación para obtener una fórmula de orden seis que aproxime a $f''(x)$.

Ejercicio 8.4 .- Hallar a_1 y a_2 para que la fórmula de derivación numérica

$$f'(x) \simeq a_1 f(0) + a_2 f(\frac{1}{2})$$

sea exacta para las funciones 1 y x.

Ejercicio 8.5 .- Dar una expresión del error en la fórmula

$$f'(\frac{a+b}{2}) \simeq a_1 f(a) + a_2 f(b)$$

si ésta es de tipo interpolatorio y $f \in C^3([a,b])$.

Ejercicio 8.6 .- La fórmula

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

¿puede ser exacta para algún polinomio de grado 3?. Razonar la respuesta.

Ejercicio 8.7 .- Dada la fórmula de cuadratura

$$\int_0^1 f(x)dx \simeq b_0 f(x_0) + b_1 f(1)$$

a) Determinar los pesos b_0 y b_1 y el nodo x_0 para que tenga grado de precisión 2.

b) Obtener la fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio con los nodos $x_0 = \frac{1}{3}$, $x_1 = 1$ para la integral

$$\int_0^1 f(x)dx$$

¿Cuál es el grado de precisión para la fórmula obtenida?.

Ejercicio 8.8 .- Comprobar que la fórmula de Simpson integra exactamente hasta los polinomios de tercer grado.

Ejercicio 8.9 .-

a) Comprobar que la siguiente fórmula de cuadratura tiene grado de precisión ≥ 4

$$\int_0^1 f(x)\,dx \simeq \frac{1}{90}\left[7f(0) + 32f(\frac{1}{4}) + 12f(\frac{1}{2}) + 32f(\frac{3}{4}) + 7f(1)\right]$$

b) A partir de la anterior, obtener una fórmula con grado de precisión ≥ 4 para

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Ejercicio 8.10 .- Determinar una fórmula de cuadratura de la forma

$$\int_0^1 f(x)\,dx \simeq \alpha\,[f(x_0) + f(x_1)]$$

que integre exactamente los polinomios hasta grado 2 (es decir, fórmula de orden ≥ 2).

Ejercicio 8.11 .- Se considera la fórmula de cuadratura numérica de Newton-Cotes (abierta o cerrada) en el intervalo [0, n]:

$$\int_0^n g(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n} b_i g(i) + M\,g^{(p+1)}(\zeta)$$

donde p es el grado de precisión de la misma. Se pide:

a) Sabiendo que la fórmula no es exacta para $g(t) = t^{p+1}$, determinar que la constante M del error viene dada por:

$$M = \frac{1}{(p+1)!}\left[\frac{n^{p+2}}{p+2} - \sum_{k=0}^{n} k^{p+1} b_k\right]$$

b) Demostrar que cuando el intervalo de integración es $[a, b]$, la expresión de la fórmula de cuadratura es

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\sum_{i=0}^{n} b_i f(a + i\,h) + h^{p+2}\,M\,f^{(p+1)}(a + \eta h), \quad h = \frac{b-a}{n}$$

Ejercicio 8.12 .- Teniendo en cuenta el resultado del ejercicio anterior,

a) determinar el término del error para la fórmula del trapecio, la fórmula de Simpson y la fórmula de Simpson tres octavos,

b) determinar el término del error para las fórmulas de Newton-Cotes abiertas con n = 2 (fórmula del punto medio), n = 3 y n = 4.

Ejercicio 8.13 .- Dadas las fórmulas de cuadratura del trapecio, de Simpson y del punto medio con sus respectivos términos del error (cf. Burden-Faires), determinar el número de subintervalos y el paso necesarios para aproximar con una precisión de 10^{-4} la integral

$$\int_1^3 e^x \operatorname{sen} x \, dx$$

cuando se utiliza:

a) La regla del trapecio compuesta

b) La fórmula de Simpson compuesta

c) La fórmula del punto medio compuesta.

Ejercicio 8.14 .- Determinar una fórmula de cuadratura gaussiana de la forma

$$\int_1^3 e^x \operatorname{sen} x \, dx \simeq b_0 \, f(x_0) + b_1 \, f(x_1) + b_2 \, f(x_2) + b_3 \, f(x_3)$$

con grado de precisión 7.

Ejercicio 8.15 .- Determinar una fórmula de cuadratura con grado de precisión ≥ 3 de la forma

$$\int_{-1}^1 g(x)w(x)dx \simeq b_0 g(x_o) + b_1 g(x_1)$$

a) cuando $w(x) = x$

b) cuando $w(x) = x^2$.

Ejercicio 8.16 .- Determinar una fórmula de cuadratura de Gauss-Chebyshev con grado de precisión 3 y de la forma

$$\int_{-1}^1 g(x)\, w(x)\, dx \simeq b_0 g(x_0) + b_1 g(x_1), \quad w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ejercicio 8.17 .- Determinar una fórmula de cuadratura de Gauss-Laguerre con grado de precisión 3 y de la forma

$$\int_0^\infty g(x)\, w(x)\, dx \simeq b_0 g(x_0) + b_1 g(x_1), \quad w(x) = e^{-x}$$