7 Interpolación y aproximación de funciones.

Ejercicio 7.1 .- Construir la tabla de diferencias divididas de la función $f(x) = x^3$ en los puntos $0, 1, 3,$ y 4. A partir de ella escribir la expresión del polinomio de interpolación de f en la forma de Newton. Escribir también la forma de Lagrange y comprobar que los dos polinomios son x^3.

Ejercicio 7.2 .- Dada la siguiente tabla de la función $f(x) = e^x$

x	0.0	0.2	0.4	0.6
$f(x)$	1.0000	1.2214	1.4918	1.8221

a) Hallar los valores aproximados de $\sqrt[3]{e}$ por interpolación lineal y cúbica, utilizando las expresiones de Lagrange y de Newton, respectivamente, de los interpolantes.

b) Dar cotas de los errores debidos a la interpolación y comparar dichas cotas con el error exacto sabiendo que $\sqrt[3]{e} = 1.395612425$.

Ejercicio 7.3 .- a) Encontrar las fórmulas de Lagrange y de Newton del polinomio de interpolación para los siguientes datos

x	-2.0	0.0	1.0
$f(x)$	0.0	1.0	-1.0

b) Escribir ambos polinomios en la forma $a + bx + cx^2$ para ver que son idénticos.

Ejercicio 7.4 .- Probar que si g interpola a la función f en $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ y h interpola a f en $x_1, \ldots, x_n$, entonces la función

$$g(x) + \frac{x_0 - x}{x_n - x_0}(g(x) - h(x))$$

interpola a f en $x_0, x_1, \ldots, x_n$. (Notar que h y g no necesitan ser polinomios).

Ejercicio 7.5 .- Dada la siguiente tabla

x	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
$J_0(x)$	0.2239	0.1666	0.1104	0.0555	0.0025	-0.0484

de la función de Bessel de orden 0,

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x \operatorname{sen} t)\, dt,$$

usar el método de las diferencias divididas de Newton para hallar los valores de $J_0(2.15)$, $J_0(2.25)$ y $J_0(2.35)$ con errores menores que $\frac{1}{2}10^{-3}$.

Ejercicio 7.6 .- Construir el polinomio de interpolación de Hermite para los siguientes datos:

x	2.2	2.4	2.6
$f(x)$	0.5207843	0.5104147	0.4813306
$f'(x)$	-0.0014878	-0.1004889	-0.1883635

Ejercicio 7.7 .- Disponemos de los siguientes datos sobre una función f :

x	0.4	0.5
$f(x)$	1.554284	1.561136
$f'(x)$	0.243031	-0.089618

a) Hallar la abscisa del máximo de f en $[0.4, 0.5]$, aproximándola por el máximo del polinomio interpolador de Hermite $p_3(x)$ a la tabla dada de f.

b) Suponiendo que $f \in C^4([x_0, x_1])$, hallar la siguiente expresión para la derivada, e_3', del error en la interpolación de Hermite en dos abscisas $x_0 < x_1$:

$$e_3'(x) \equiv f'(x) - p_3'(x) = \frac{f^{(4}(\eta(x))}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - \zeta)\,,$$

donde $\zeta \in [x_0, x_1)$ y $\eta(x) \in (\min\,\{x_0, x_1, x\},\max\{x_0, x_1, x\})$.

c) Acotar el error en la abscisa del máximo debido a la interpolación, sabiendo que $\left|f^{(4}(x)\right| < 10^3$ y $\left|f^{(2}(x)\right| < 10^3, \forall x \in (0.4, 0.5)$.

Ejercicio 7.8 .- Dada la función

$$S(x) = \begin{cases} 1 + x - x^3, \quad x \in [0,1] \\ 1 - 2(x-1) - 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3, \quad x \in [1,2] \\ 4(x-2) + 9(x-2)^2 - 3(x-2)^3, \quad x \in [2,3] \end{cases}$$

a) Comprobar si esta función coincide o no con el spline cúbico natural que interpola los puntos (0,1), (1,1), (2,0) y (3,10).

b) Utilizar el spline cúbico natural para aproximar el valor de la derivada de la función interpolada en $x = 1$.

Ejercicio 7.9 .- Se desea interpolar $f(x) = |x|$ por un spline cubico natural $S(x)$, y contrastar el resultado con la interpolación polinomial. Tomando los puntos $x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 2$, como puntos de interpolación, construir la tabla de valores de $S(x)$ y del polinomio de interpolación $p(x)$ para $x = 1, 1.2, 1.4, 1.6$ y 2.0. Contrastar también los valores de las derivadas en esos puntos.

Ejercicio 7.10 .- Hallar el spline cúbico natural de nodos $-h, 0, h$ que interpola a una función dada f en esos puntos. En concreto, hallar el spline que interpola a $f(x) = (1+x^2)^{-1}$ en $-1, 0, 1$. Hallar también el spline cúbico "clamped" (frontera sujeta) para la función, y los nodos anteriores, y evaluar el error cometido por los dos splines en el punto $x = 0.5$ para la función y la derivada.

Ejercicio 7.11 .- Dadas las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, en [1, 2],

b) $f(x) = \cos \pi x$, en [0,1],

c) $f(x) = x^3 - 1$, en [0, 2],

d) $f(x) = |x|$, en [-1, 1], con función peso $(1 - x^2)^{-1/2}$,

hallar el polinomio de segundo grado mejor aproximación por mínimos cuadrados de cada una de ellas.