5 Resolución numérica de ecuaciones no lineales.

Ejercicio 5.1 .- Comprobar que la ecuación $x^3-x-1=0$ tiene una única raíz en el intervalo $[1,2]$. ¿Cuántas iteraciones del método de bisección se deben realizar para aproximar dicha raíz con un error menor que 10^{-4}?

Ejercicio 5.2 .- Sea la función $g(x)=\sqrt{2+x}$, definida en el intervalo $I=[0,7]$. Comprobar que tiene un único punto fijo en I que se puede obtener a partir de cualquier $x_0 \in I$.

Ejercicio 5.3 .- Dada $g(x)=x^2-2x+2$, encontrar un intervalo I tal que para todo x_0 de I la iteración $x_{n+1}=g(x_n)$, $n \geq 0$ sea convergente. ¿Cuál es el orden de convergencia?

Ejercicio 5.4 .- Probar que la ecuación $x-\cos x=0$ tiene una única raíz en $[0,\frac{\pi}{2}]$. Considerar el esquema iterativo:

$$\begin{cases} x_0 \text{ arbitrario} \\ x_{n+1}=\cos x_n, \;\; n \geq 0 \end{cases}$$

y probar su convergencia.

Ejercicio 5.5 .- Estudiar qué valores deben tomar a y b en

$$g(x)=\frac{x^3+ax}{bx^2+3},$$

para que el método $x_{n+1}=g(x_n)$ proporcione la raíz cuadrada positiva de 3, con convergencia local al menos cuadrática.

Ejercicio 5.6 .- Aplicar el método de Newton-Rapson para calcular la raíz cúbica de un número $k>0$.

Ejercicio 5.7 .-

a) Hallar las condiciones que debe cumplir la función $h(x)$ para que la iteración

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^2-c}{2x_k}\,h(x_k),$$

produzca $\sqrt{c}$ (c real positivo) con convergencia al menos cúbica si se parte de un x_0 próximo a $\sqrt{c}$.

b) Hallar $h(x)$ de la forma $a+bx^2$ satisfaciendo esas condiciones.

Ejercicio 5.8 .-

a) Probar que el método de Newton aplicado al cálculo de raíces múltiples tiene orden de convergencia lineal.

b) Comprobar que si se modifica como

$$x_{k+1}=x_k-m\,\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

donde m es la multiplicidad algebraica de la raíz que se quiere calcular, la convergencia es cuadrática.

Ejercicio 5.9 .- Sea la sucesión definida por:

$$x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}},\ n \geq 1.$$

a) Probar que converge a $\sqrt{2}$ cuando $x_0 > \sqrt{2}$.

b) Usar el hecho de que $0 < (x_0 - \sqrt{2})^2$ si $x_0 \neq \sqrt{2}$ para probar que si $0 < x_0 < \sqrt{2}$, entonces $x_1 > \sqrt{2}$.

c) Usar los resultados anteriores para probar que la sucesión converge a $\sqrt{2}$ si $x_0 > 0$.

Ejercicio 5.10 .- Al resolver la ecuación arctg $x = 0$ utilizando el método de Newton-Raphson con valor inicial $x_0 = 2$, se obtienen los resultados de la tabla:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-3.536	13.95	-279.3	$1.22*10^5$	$-2.33*10^6$	$8.59*10^{20}$

Explicar lo sucedido y demostrar que puede corregirse este comportamiento partiendo de otro valor inicial.

Ejercicio 5.11 .- Sea f una función tres veces diferenciable con continuidad de la que buscamos un cero simple.

a) Deducir la fórmula correspondiente al método iterativo que obtiene x_{k+1} evaluando en cero el polinomio de Taylor de grado menor o igual que dos de la función inversa g de f en $f(x_k)$.

b) Probar que el método descrito tiene orden de convergencia al menos tres para ceros simples y determinar la constante asintótica del error cuando el orden es tres.

Ejercicio 5.12 .- Demostrar que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{2} - x + \dfrac{7}{24} & = 0 \\ xy - y + \dfrac{1}{9} & = 0 \end{cases}$$

tiene una solución única en el intervalo $[0, 0.4] \times [0, 0.4]$. Aplicar tres veces el método de Newton-Rapson para el cálculo aproximado de dicha solución.

Ejercicio 5.13 .- Aplicar el método de Newton para calcular la solución del sistema no lineal:

$$\begin{cases} x_1 = \operatorname{sen}(x_1 + x_2) \\ x_2 = \cos(x_1 - x_2) \end{cases}$$

cerca de $x_1 = 1, x_2 = 1$. Detener el proceso cuando la diferencia entre dos iteraciones consecutivas sea en $||\ .\ ||_\infty$ menor que 10^{-10}.

Ejercicio 5.14 .- Hallar un factor cuadrático del polinomio $2x^3 + x^2 + 3x - 2$, aplicando el método de Bairstow tres veces, partiendo de $s_0 = 0$, $p_0 = 1$.

Ejercicio 5.15 .- Obtener todos los ceros del polinomio

$$p(x) = x^4 - 2x^3 - 14x^2 - 2x - 15$$

utilizando el método de Bairstow.