# 4 Sistemas lineales: métodos tipo gradiente

**Ejercicio 4.1 .-** Demostrar que si $A$ es una matriz simétrica y definida positiva, el gradiente del funcional $J(x) = x^T Ax - 2x^T b$ es $2(Ax - b)$. Comprobar que el valor mínimo de $J(x)$ es $-b^T A^{-1} b$.

**Ejercicio 4.2 .-** Demostrar que si $A$ es una matriz simétrica definida positiva y denotamos por $r_n = b - Ax_n,\ e_n = x - x_n$, siendo $x$ la solución del sistema $Ax = b$, entonces:

a) $r_n^T \cdot e_n \geq 0$.

b) $r_n^T \cdot e_n = 0$ si y sólo si $Ax_n = b$.

**Ejercicio 4.3 .-** Dado el funcional $J(x) = \dfrac{x^T A\, x}{x^T B\, x}$, donde $A$ y $B$ son matrices simétricas y $B$ definida positiva, probar :

$$\text{grad }\ J(x) = \frac{2}{x^T Bx}\,(Ax - J(x)\,Bx).$$

**Ejercicio 4.4 .-** ¿Qué condiciones tiene que cumplir el parámetro $\rho_n$ del método del gradiente para que éste sea equivalente al de Richardson de los métodos iterativos?. ¿Qué condiciones tienen que cumplir $\rho_n$ y $A$ para que el método del gradiente sea equivalente al método de Jacobi?.

**Ejercicio 4.5 .-** Resolver el sistema $Ax = b$, con $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ y $b = (\,-2 \quad 2\,)^T$:

a) aplicando el método del gradiente

b) aplicando el método del gradiente conjugado.

**Ejercicio 4.6 .-** Sea $A$ una matriz simétrica regular, $Ax = b$ e $y$ un vector arbitrario. Sea $q$ dada por $q(x) = x^T Ax - 2x^T b$. Demostrar:

$$(x - y)^T A\,(x - y) = b^T A^{-1} b + q(y)\,.$$

Esto demuestra que minimizar $q(y)$ es equivalente a minimizar $(x - y)^T A(x - y)$.