3 Sistemas lineales: métodos iterativos

Ejercicio 3.1 .- Hallar un valor aproximado de la solución del sistema:

$$\begin{aligned} 9x - 2y &= 5 \\ -2x + 4y - z &= 1 \\ -y + z &= -\frac{5}{6} \end{aligned}$$

trabajando con cuatro cifras decimales únicamente, tomando $x^{(0)} = y^{(0)} = z^{(0)} = 0$ y aplicando tres veces:

a) el método de Jacobi

b) el método de Gauss-Seidel

c) el método de relajación con $\omega = 1.2$

Ejercicio 3.2 .- Si la solución exacta del sistema del ejercicio **??** es $x = \frac{2}{3}, y = \frac{1}{2}, z = -\frac{1}{3}$, como puede comprobarse, interpretar los resultados anteriores, hallando además el valor óptimo de ω para este sistema.

Ejercicio 3.3 .- Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^n$. Se desea resolver el sistema lineal $Ax = b$ y para ello se considera el método iterativo

$$\begin{cases} x_0 & \text{arbitrario} \\ x_{n+1} = Bx_n + b, & n \geq 0 \end{cases}$$

donde $B = I - A$.

a) Estudiar si el método propuesto es consistente.

b) Establecer una condición necesaria y suficiente sobre los valores propios de A para que el método propuesto sea convergente.

c) Para el sistema lineal

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_2 + \frac{9}{4}x_3 &= -2 \\ -\frac{x_2}{4} - \frac{x_3}{2} &= 1. \end{aligned}$$

¿Es convergente el método?. Estudiar si el método de Jacobi converge. A la vista de los resultados, ¿cuál es mejor en este caso?.

Ejercicio 3.4 .- Para la resolución del sistema lineal $Ax = b$ se considera el siguiente método iterativo llamado de Richardson:

$$\begin{cases} x_0 & \text{arbitrario} \\ x_{k+1} = (I - A)x_k + b, & k \geq 0. \end{cases}$$

a) Comprobar que si A tiene la propiedad

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| < 1 = a_{ii}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

entonces, el método de Richardson es convergente.

b) Demostrar que si se divide cada ecuación del sistema $A\,x = b$ por el elemento de la diagonal correspondiente y luego se aplica el método de Richardson al sistema lineal resultante, el resultado es equivalente a aplicar el método de Jacobi al sistema original.

c) Estudiar la convergencia del método de Jacobi cuando se aplica al sistema $Ax = b$, siendo $b = (11, 11, 11)^T$ y

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

d) Partiendo del vector inicial $(2, 2, 2)^T$, calcular una iteración de los métodos de Richardson, Jacobi y Gauss-Seidel para el sistema $A\,x = b$ con $b = (10, 8, 10)^T$ y

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3.5 .- Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ -b & c & 1 \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\,.$$

a) Hallar la relación que debe verificarse entre a, b y c para que el sistema $Ax = B$ tenga solución única. Se considerará en adelante que se verifica esta relación.

b) Hallar la relación entre a, b y c para que sea convergente el método de Jacobi aplicado al sistema $Ax = B$.

c) Considerando el caso particular en que $b = 0$, verificar que en este caso los algoritmos de Gauss-Seidel y Jacobi convergen ó divergen simultáneamente.

d) ¿Para qué valores de a, b y c las matrices A correspondientes son simétricas definidas positivas?. Estudiar en ese caso la convergencia de los algoritmos de Gauss-Seidel y Jacobi.

Ejercicio 3.6 .- Se desea resolver el sistema lineal $Ax = b$ y para ello se considera el siguiente método iterativo, con $\alpha > 0$:

$$\begin{cases} x_0 & \text{arbitrario} \\ x_{n+1} = (I - \alpha A)x_n + c \end{cases}$$

a) Determinar c para que el método sea consistente.

b) Suponiendo los valores propios de A reales, probar que el método es convergente si $\lambda \in (0, \dfrac{2}{\alpha})$, para todo λ, valor propio de A.

c) Determinar los valores de α que hacen convergente el método iterativo cuando se aplica a la resolución del sistema lineal:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

Ejercicio 3.7 .- Sea un sistema $Ax = b$, con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar los radios espectrales de las matrices de Jacobi y Gauss-Seidel. ¿Qué se observa de los resultados obtenidos?.

Ejercicio 3.8 .- Para resolver el sistema lineal

$$\begin{cases} x_1 - a x_2 = b_1 \\ -a x_1 + x_2 = b_2 \end{cases}$$

se va a aplicar el método de relajación con parámetro ω comprendido entre 0 y 2.

a) Sea $a = \frac{1}{2}$. Hallar el radio espectral de la matriz del método para $\omega = 0.1, 1/2, 1, 3/2$ y 2.

b) De a) deducir cuál es el mejor valor entre todos los de ω respecto a rapidez de convergencia y cuál es el mejor entre los que verifican $0 < \omega < 2$.

Ejercicio 3.9 .- En la resolución del sistema $Ax = b$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

hacer un estudio completo de la convergencia de los métodos de Jacobi, Gauss-Seidel y relajación.

Ejercicio 3.10 .- Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 0 \\ -1 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 19 \\ 3 \end{pmatrix},$$

se considera el método iterativo dado por

$$x_{n+1} = (I - \alpha D^{-1} A)\, x_n + \alpha D^{-1} b,$$

siendo D la matriz diagonal de A y $\alpha \in \mathbb{R}$. ¿Para qué valores de α el método propuesto converge?, razonar la respuesta.

Ejercicio 3.11 .- Se pretende resolver el siguiente sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

a) Calcular la matriz B_J de iteración del método de Jacobi y las normas $\|B_J\|_\infty$ y $\|B_J\|_1$. Con los valores obtenidos para estas normas, ¿se puede asegurar la convergencia del método de Jacobi?.

b) Estudiar la convergencia del método de Jacobi cuando se aplica a la resolución del sistema lineal anterior.

c) Cuando se aplican los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel al sistema lineal anterior partiendo de la aproximación inicial $x_0 = (0, 0, 0)^T$ y tolerancia $= 10^{-7}$, se obtienen los siguientes resultados:

- Jacobi: converge en 41 iteraciones a $x_{41} = (-6.1111110, -0.3333331, -1.1111110)$
- Gauss-Seidel: converge en 15 iteraciones a $x_{15} = (-6.11111104, -0.3333331, -1.1111110)$

Indicar razonadamente por qué se cree que un método es más rápido que el otro.