2 Normas matriciales

Ejercicio 2.1 .- Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar: $\|A\|_1$, $\|A\|_2$ y $\|A\|_\infty$.

Ejercicio 2.2 .- Probar que en $\mathbb{R}^n$ las normas $\| \quad \|_1$, $\| \quad \|_2$ y $\| \quad \|_\infty$ son equivalentes.

Ejercicio 2.3 .- Probar que

$$\|A\|_1 = \max_j (\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|)$$

.

Ejercicio 2.4 .- Comprobar que $\|A\| = \max_{i,j} |a_{i,j}|$ no es una norma matricial. Demostrar que existe un número real k fijo tal que $\|A\| = k \max_{i,j} |a_{i,j}|$ es norma matricial.

Ejercicio 2.5 .- Sea B una matriz simétrica real, con valores propios $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$. Demostrar que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \lambda_1 \, x^T x \leq x^T B x \leq \lambda_n \, x^T x.$$

Ejercicio 2.6 .- Deducir del problema anterior que, si A es una matriz de orden n real, $\|Ax\|_2^2 \leq \mu^2 \, x^T x$, donde $\mu = \rho(A^T A)^{1/2}$.

Ejercicio 2.7 .- Teniendo en cuenta el problema anterior y utilizando un vector propio u de μ^2, probar que $\|A\|_2 = \rho(A^T A)^{1/2}$.

Ejercicio 2.8 .- Hallar dos matrices A y B tales que $\rho(A + B) > \rho(A) + \rho(B)$.

Ejercicio 2.9 .- Sea A una matriz simétrica definida positiva. Para cada $x \neq 0$ se define el *cociente de Rayleigh*

$$R(x) = \frac{x^T A \, x}{x^T x}.$$

Demostrar que el mínimo y el máximo de esta función son los valores propios de A de menor y mayor valor absoluto, respectivamente.

Ejercicio 2.10 .- Sea A una matriz inversible. Probar:

a) A es simétrica si y sólo si A^{-1} lo es.

b) A es simétrica definida positiva si y sólo si A^{-1} lo es.