1 Sistemas lineales: métodos directos

Ejercicio 1.1 .- Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

mediante:

a) el método de Gauss sin elección de pivote

b) el método de Gauss con elección de pivote parcial

c) el método de Gauss con elección de pivote total.

Ejercicio 1.2 .- Usando aritmética de punto flotante de cuatro decimales, comparar los resultados obtenidos al resolver el sistema

$$\begin{cases} 0.0003x_1 + 1.566x_2 = 1.569 \\ 0.3454x_1 - 2.436x_2 = 1.018 \end{cases}$$

por el método de Gauss simple ó con elección de pivote total. La solución exacta del sistema es $x_1 = 10$, $x_2 = 1$.

Ejercicio 1.3 .- Usar el método de Gauss-Jordan y aritmética de redondeo de dos dígitos para resolver el sistema:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$$

Ejercicio 1.4 .- Comprobar que el método de Gauss-Jordan requiere:

$\dfrac{n^3}{2} + n^2 - \dfrac{n}{2}$ multiplicaciones /divisiones, y $\dfrac{n^3}{2} - \dfrac{n}{2}$ sumas/restas.

Ejercicio 1.5 .- Hallar la factorización LU de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

tomando $l_{11} = l_{22} = l_{33} = 1$ y resolver el sistema $Ax = b$, utilizando dicha factorización.

Ejercicio 1.6 .- Resolver el sistema siguiente utilizando la factorización de Choleski, comprobando previamente que la matriz de coeficientes es simétrica definida positiva:

$$\begin{cases} x - y + z = 4 \\ -x + 2y - z + 2t = -3 \\ x - y + 5z + 2t = 16 \\ 2y + 2z + 6t = 8 \end{cases}$$

Ejercicio 1.7 .- Un fabricante utiliza cuatro ingredientes `E`,`F`,`G` y `H`, en la elaboración de un cierto producto alimenticio. Sean x, y, z, t las cantidades respectivas de `E`,`F`,`G` y `H` que componen el producto.

Una unidad de cada uno de los ingredientes proporciona vitaminas `A`,`B` y `C` en las cantidades en miligramos que se expresan en la siguiente tabla, así como un número de kilocalorías que también aparece reflejado en la tabla.

	E	F	G	H
vit. A	1	1	1	2
vit. B	1	2	1	3
vit. C	1	3	2	1
kilocal.	2	2	1	1

Si designamos respectivamente por u, v, r y w los miligramos de vitamina `A,B` y `C` y las kilocalorías, que tendrá el producto elaborado con los cuatro ingredientes, se pide:

a) Expresar matricialmente la relación entre las cantidades x, y, z, t y u, v, r, w.

b) Justificar si dados unos valores fijos de u, v, r, w es posible encontrar de forma única valores de x, y, z, t que proporcionen esos miligramos de vitaminas y esas kilocalorías.

c) Calcular utilizando el método de factorización LU qué cantidad de cada ingrediente es necesaria para que la composición del producto conste de

1) 300 mg. de vitamina `A`, 430 mg. de `B`, 310 mg. de `C` y 250 kilocalorías.
2) 250 mg. de vitamina `A`, 350 mg. de vitamina `B`, 350 mg. de vitamina `C` y 300 kilocalorías.

Ejercicio 1.8 .- Se pretende resolver el sistema lineal $Ax = b, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible, y se conoce una factorización de A en la forma QU, con Q ortogonal y U triangular superior. ¿Cómo hallarías dicha solución?. ¿Qué coste computacional añade al de la factorización?

Ejercicio 1.9 .- Sea el sistema tridiagonal de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} a_1x_1 + c_1x_2 \qquad\quad &= d_1 \\ b_2x_1 + a_2x_2 + c_2x_3 &= d_2 \\ \cdots \qquad\qquad & \\ b_nx_{n-1} + a_nx_n &= d_n. \end{aligned}$$

a) Se construyen dos sucesiones finitas $(f_r)_{r=1}^n$ y $(g_r)_{r=1}^n$ del siguiente modo:

$$\begin{cases} f_1 = -c_1/a_1 \\ f_r = \dfrac{-c_r}{b_rf_{r-1} + a_r}, \; r = 2, \cdots, n-1, \\ f_n = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} g_1 = d_1/a_1 \\ g_r = \dfrac{d_r - b_rg_{r-1}}{b_rf_{r-1} + a_r}, \; r = 2, \cdots, n. \end{cases}$$

Comprobar que los denominadores de ambas sucesiones son

$$\Delta_r/\Delta_{r-1}, \; r = 1, 2, \cdots, n,$$

donde $\Delta_0 = 1$ y Δ_r es el r–ésimo menor principal director de la matriz de coeficientes del sistema para $r \geq 1$.

b) Demostrar que la solución $x_1, x_2, \cdots, x_n$ del sistema verifica

$$x_r = f_rx_{r+1} + g_r, \; r = n-1, n-2, \cdots, 1.$$

c) Mostrar la utilidad de a) y b) para resolver el sistema

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & -x_2 & & & & = & 8 \\ -x_1 & +2x_2 & -x_3 & & & = & 4 \\ & -x_2 & +2x_3 & -x_4 & & = & 6 \\ & & -x_3 & +2x_4 & -x_5 & = & 0 \\ & & & -x_4 & +2x_5 & = & 0 \end{array}$$

y dar condiciones suficientes para que este procedimiento se pueda realizar.