Integración numérica

M. Palacios

Integración numérica

Fórmulas de cuadratura

n+1 nodos distintos $[x_0, x_n]$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \sum_{k=0^n} a_k\, f(x_k) + E(f)$$

F. c. de tipo interpolatorio: exactas para polinomios de grado d.

Newton-Côtes cerradas

Nodos: $x_k = x_0 + kh, k = 0, 1, ..., n$

Trapecio : $x_0, x_1 = x_0 + h,$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}(f_0 + f_1), \quad E(f) = -\frac{h^3}{12} f^{(2)}(\xi)$$

Simpson : $x_0, x_1 = x_0 + h, x_1 = x_0 + 2h,$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2), \quad E(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

Simpson tres octavos :

$$x_0, x_1 = x_0 + h, x_1 = x_0 + 2h, x_3 = x_0 + 3h,$$

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx \approx \frac{3\,h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3), \quad E(f) = -\frac{3\,h^5}{80} f^{(4)}(\xi)$$

Newton-Côtes abiertas .

Nodos: $x_k = x_0 + kh, k = 1, ..., n-1$

(solo nodos interiores)

Punto medio : $x_1 = x_0 + h$,

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx 2\,h\,f_1, \quad E(f) = \frac{h^3}{3} f^{(2)}(\xi)$$

Dos nodos : $x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h$,

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx \approx \frac{3\,h}{2}(f_1 + f_2), \quad E(f) = \frac{h^3}{4} f^{(2)}(\xi)$$

Tres nodos :

$$x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, x_3 = x_0 + 3h,$$

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)\,dx \approx \frac{4\,h}{3}(2f_1 - f_2 + 2f_3), \quad E(f) = \frac{28\,h^3}{90} f^{(4)}(\xi)$$

Error en las fórmulas de Newton-Cotes cerradas

Nodos: $x_0 = a, x_1, ..., x_n = b$, equidistantes,

$$h = (b-a)/n$$

Si n es par:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^n A_i\,f(x_i) + \frac{h^{n+3}\,f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}\int_0^n t^2\,(t-1)...(t-n)dt$$

Si n es impar:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^n A_i\,f(x_i) + \frac{h^{n+2}\,f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\int_0^n t\,(t-1)...(t-n)dt$$

Error en las fórmulas de Newton-Cotes abiertas

Nodos: $x_{-1} = a, x_0, x_1, ..., x_n, x_{n+1} = b$, equidistantes,

$$h = (b-a)/(n+2),$$

Si n es par:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^n A_i\,f(x_i) + \frac{h^{n+3}\,f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}\int_{-1}^{n+1} t^2\,(t-1)...(t-n)dt$$

Si n es impar:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^n A_i\,f(x_i) + \frac{h^{n+2}\,f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\int_{-1}^{n+1} t\,(t-1)...(t-n)dt$$

Fórmulas compuestas

Convergencia y estabilidad

Trapecio :

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}(f_0 + 2\sum_{j=1}^{n-1} f_j + f_n),$$

$$E(f) = -\frac{b-a}{12}\,h^2\,f^{(2)}(\xi)$$

Simpson : n par

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(f_0 + 2\sum_{j=1}^{n/2-1} f_{2j} + 4\sum_{j=1}^{n/2} f_{2j-1} + f_n),$$

$$E(f) = -\frac{b-a}{180}\,h^4\,f^{(4)}(\xi)$$

Integración de Romberg

Aplicar fórmula compuesta trapezoidal sucesivamente con

$$m = 2^{k-1}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \Longrightarrow h_k = \frac{b-a}{2^k - 1}, \qquad h_{k+1} = h_k/2$$

Se tiene:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = R_{k,1} + C_1\,h_k^2 + \sum_{j=2}^{\infty} C_j\,h_k^{2j}$$

Eliminando los términos en C_1, resulta:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \frac{4R_{k+1,1} - R_{k,1}}{4-1} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{C_j}{3}\frac{1-4^{j-1}}{4^{j-1}}\,h_k^{2j}$$

Llamando

$$R_{k,j} = \frac{4^{j-1} R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^{j-1} - 1}$$

$$\begin{array}{lllll}
R_{1,1} & & & & \\
R_{2,1} & R_{2,2} & & & \\
R_{3,1} & R_{3,2} & R_{3,3} & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
R_{n,1} & R_{n,2} & R_{n,3} & \cdots & R_{n,n}
\end{array}$$

Fórmulas de cuadratura gaussiana

Nodos: raíces del polinomio ortogonal de grado n+1.

Gauss-Legendre : $w(x) = 1, \quad [-1, 1]$

Gauss-Chebyshev : $w(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}, \quad [-1, 1]$

$$[a, b] \longrightarrow [-1, 1]$$

$$x \longrightarrow t = \alpha x + \beta,$$

$$\alpha = \frac{2}{b - a}, \quad \beta = 1 - \alpha\, b$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{b - a}{2} \int_{-1}^{1} g(t)\, dt$$

Gauss-Laguerre : $w(x) = e^{-x}, \quad [0, \infty]$

Gauss-Hermite : $w(x) = e^{-x^2}, \quad [-\infty, \infty]$

Integración múltiple

$$\int \int f(x,y)\, dxA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx$$

a) Considerar nodos equidistantes

$x_0, x_1, ..., x_{2n}$ en el eje OX y

$y_0, y_1, ..., y_{2m}$ en el eje OY,

separados por

$h = (b-a)/2n, \quad k = (d-c)/2m$, respectivamente.

b) Calcular $\int_c^d f(x,y)\, dy$, tomando x como constante, mediante una fórmula compuesta (por ej., Simpson)

c) Calcular $\int_a^b f(x,y_j)\, dx$ mediante la misma fórmula compuesta

Da lugar a una suma con $n\, m$ sumandos de la forma: $\alpha\, f(x_i, y_j)$