Cálculo numérico (Ingeniería Industrial Plan 94)

Práctica 3: Valores y vectores propios

Objetivos generales:

Se pretende **profundizar** sobre los contenidos teórico–prácticos relativos a la determinación numérica de valores y vectores propios de matrices simétricas o no.

Se **experimenta** en distintos ejemplos con los métodos más habituales para ver sus características. Se construye la matriz ”compañera” de un polinomio para encontrar todas la **raíces** del mismo.

También se considera el problema de valores propios en ecuaciones diferenciales (**problema de Sturm-Liouville**) trabajando ligeramente un ejemplo.

Para desarrollar esta práctica han sido creadas las siguientes **aplicaciones**:

potencia, poten-inv, qrsim, qrnosim

que contienen, respectivamente, los métodos de la potencia, potencia inversa con desplazamiento, factorización QR para matrices simétricas y factorización QR para matrices arbitrarias.

Ejercicios propuestos

1.- Sabiendo que la matriz A $= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ tiene los valores propios $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 3$, realizar cuatro iteraciones con el método de la potencia tomando como vector inicial $u_o = (1, 0)$.

2.- Los elementos de la matriz A $= \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ se encuentran en el fichero **ej2.dat**, se pide:

a) calcular el valor propio de mayor módulo y un vector propio asociado

b) ¿Cómo se procedría para hallar el valor propio de menor módulo?. Si puede llevarse a cabo con las herramientas que se proporcionan en esta práctica, hágase.

c) Para aplicar el método del gradiente conjugado se necesita que la matriz A sea simétrica y definida positiva, ¿se puede aplicar con la matriz dada?

3.- Los elementos de la matriz A $= \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ que define el sistema de ecuaciones lineales $A\,x = b$ se encuentran en el fichero **ej3.dat**, se pide:

a) ¿Es el sistema anterior compatible determinado?

b) Para aplicar el método del gradiente conjugado se necesita que la matriz A sea simétrica y definida positiva, ¿se puede aplicar con la matriz dada?

4.- Se considera la siguiente matriz por bloques:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A23 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Tratando de minimizar el gasto computacional, ¿qué métodos se deberían aplicar para calcular el valor propio dominante de A?. ¿Qué relación existe entre el determinante de A y el de las matrices bloques A_{ij}.

5.- Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10^{-3} & 10^{-3} \\ 10^{-3} & 2 & 10^{-3} \\ 10^{-3} & 10^{-3} & 3 \end{pmatrix},$$

sin utilizar el ordenador, obtener la mejor aproximación de los valores propios y dar una explicación coherente. Comparar con los resultados obtenidos mediante alguna de las aplicaciones propuestas (fichero 5.dat).

6.- Utilizando alguna o varias de las aplicaciones proporcionadas calcular los valores propios de las matrices de los ejemplos siguientes, cuyos datos están en los ficheros **ej61.dat, ej62.dat, ej63.dat, ej64.dat y ej65.dat**, respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -9 \\ 1 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 1 & 0 & -22 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1.1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Explicar en cuál de los anteriores ejemplos podría haberse aplicado el método de la potencia.

7.- Dado un polinomio cualquiera de coeficientes reales

$$p(\lambda) = a_o + a_1\,\lambda + \ldots + a_{n-1}\,\lambda^{n-1} + \lambda^n,$$

se tiene que $p(\lambda) = det(\lambda\, I - A)$, donde A es la matriz "compañera" siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_o \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_2 \\ 0 & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$

por lo que las raíces del polinomio coinciden con los valores propios de la matriz compañera. Aplicando este resultado, se pide:

a) Construir la matriz A compañera del polinomio $p(x) = 2 - 12.6\,x + 23.4\,x^2 - 14.8\,x^3 + x^4 + x^5$.

b) Hallar todas las raíces del polinomio anterior utilizando técnicas numéricas de cáclculo de valores propios. En particular, hallar los valores propios de la matriz compañera del polinomio anterior que se encuentran en el fichero **ej7.dat**.

8.- Considérese el problema de Sturm-Liouville siguiente:

$$y''(x) + \lambda\, y(x) = 0, \quad x \in (0,1), \quad y(0) = y(1) = 0$$

Discretizando el problema anterior con paso $h = 1/(n+1)$ y aproximando la derivada segunda mediante diferencias centrales, resulta el siguiente problema de valores propios en dimensión finita:

$$y_0 = 0, \quad , y_{n+1} = 0, \quad \frac{y_{k+1} - 2\,y_k + y_{k-1}}{h^2} + \lambda\, y_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

donde y_k es una aproximación de $y(k\,h)$. Se pide:

a) Hallar los valores propios del problema de contorno anterrior

b) Escribir la matriz del problema discretizado. Con la aplicación oportuna (de las proporcionadas), encontrar todos los valores propios del problema discretizado. (Los datos de la matriz están en el fichero **ej8.dat**.

c) Discutir la aproximación del problema discreto y la del continuo.