3.I Integración numérica

Manuel Palacios

Departamento de Matemática Aplicada

Centro Politécnico Superior

Universidad de Zaragoza

Primavera 2001

Contents

References

[1] Burden, R. L. and Faires, J. D.: Análisis Numérico. *Grupo Editorial Iberoamerica*, 1985.

[2] Gasca, M.: Cálculo numérico: resolución de ecuaciones y sistemas. *Librería Central*, 1987.

[3] Hairer, E.: Introduction l'Analyse Numérique. *Université de Genève, Dept. de Mathématiques*, 1993.

[4] Conde, C. y Winter, G.: Métodos y algoritmos del álgebra numérica. *Editorial Reverté*, 1990.

1 Algunas fórmulas de Newton-Cotes cerradas

Cambio de intervalo:

$$t \in [-1,1] \longrightarrow x \in [a,b], \qquad x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\,t$$

Regla del trapecio

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\,(f_0 + f_1) - \frac{h^3}{12}\,f''(\xi), x_0 < \xi < x_1$$

Regla del Simpson

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\,(f_0 + 4\,f_1 + f_2) - \frac{h^5}{90}\,f^{(4)}(\xi), x_0 < \xi < x_2$$

Regla de Simpson de los 3/8

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx = \frac{3\,h}{8}\,(f_0 + 3\,f_1 + 3\,f_2 + f_3) - \frac{3\,h^5}{80}\,f^{(4)}(\xi), x_0 < \xi < x_3$$

Regla de Bode o de Milne

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)\,dx = \frac{2\,h}{45}\,(7\,f_0 + 32\,f_1 + 12\,f_2 + 32\,f_3 + 7\,f_4) - \frac{8\,h^7}{945}\,f^{(6)}(\xi),$$
$$x_0 < \xi < x_4$$

$$\int_{x_0}^{x_5} f(x)\,dx = \frac{5\,h}{288}\,(19\,f_0 + 75\,f_1 + 50\,f_2 + 50\,f_3 + 75\,f_4 + 19\,f_5)$$
$$-\frac{275\,h^7}{12096}\,f^{(6)}(\xi), x_0 < \xi < x_5$$

2 Algunas fórmulas de Newton-Cotes abiertas

Regla del punto medio

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = 2\,h\,f_1 + \frac{h^3}{3}\,f''(\xi), \quad x_0 < \xi < x_2$$

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx = \frac{3\,h}{2}\,(f_1 + f_2) - \frac{3\,h^3}{4}\,f''(\xi), \quad x_0 < \xi < x_3$$

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)\,dx = \frac{4\,h}{3}\,(2\,f_1 - f_2 + 2\,f_3) + \frac{28\,h^5}{90}\,f^{(4)}(\xi),$$
$$x_0 < \xi < x_4$$

$$\int_{x_0}^{x_5} f(x)\,dx = \frac{5\,h}{24}\,(11\,f_1 + f_2 + f_3 + 11\,f_4) + \frac{95\,h^7}{144}\,f^{(4)}(\xi),$$
$$x_0 < \xi < x_5$$

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x)\,dx = \frac{6\,h}{20}\,(11\,f_1 - 14\,f_2 + 26\,f_3 - 14\,f_4 + 11\,f_5) + \frac{41\,h^7}{140}\,f^{(6)}(\xi),$$
$$x_0 < \xi < x_6$$

3 Error en las fórmulas de Newton-Cotes cerradas

Tomando los nodos: $x_0 = a, x_1, ..., x_n = b$, equidistantes,

$$h = (b-a)/n,$$

se tiene:

Si n es par:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} A_i\, f(x_i) + \frac{h^{n+3}\, f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_0^n t^2\,(t-1)...(t-n)dt$$

Si n es impar:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} A_i\, f(x_i) + \frac{h^{n+2}\, f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_0^n t\,(t-1)...(t-n)dt$$

4 Error en las fórmulas de Newton-Cotes abiertas

Tomando los nodos: $x_{-1} = a, x_1, ..., x_{n+1} = b$, equidistantes,

$$h = (b-a)/(n+2),$$

se tiene:

Si n es par:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} A_i\, f(x_i) + \frac{h^{n+3}\, f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_{-1}^{n+1} t^2\,(t-1)...(t-n)dt$$

Si n es impar:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} A_i\, f(x_i) + \frac{h^{n+2}\, f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_{-1}^{n+1} t\,(t-1)...(t-n)dt$$