

2.I Introducción a la interpolación y aproximación.

Manuel Palacios

Departamento de Matemática Aplicada

Centro Politécnico Superior - Universidad de Zaragoza

Otoño 2001

Contents

1	Planteamiento general	2
2	La mejor aproximación	2
3	El problema del ajuste	5
3.1	El problema lineal de los mínimos cuadrados	6
4	Aproximación mediante polinomios	7
4.1	El polinomio de Taylor	7

Referencias

[1] Burden, R. L. and Faires, J. D.: Análisis Numérico. *Grupo Editorial Iberoamerica*, 1985.

[2] Kincaid, D. and Cheney, W.: Análisis numérico: Las matemáticas del cálculo científico. *Addison-Wesley Iberoamericana*. 1994

[3] Sanz-Serna, J. M. et al.: Interpolación y aproximación. it Universidad de Valladolid. 1980

1 Planteamiento general

En muchas ocasiones se desea ejecutar un proceso, P , sobre una función f , para obtener $P(f)$. Procesos corrientes pueden ser: evaluar la función en un punto, encontrar sus ceros, calcular la integral en un intervalo, etc. Puede ocurrir que la función y/o sus derivadas solamente sean conocidas en algunos puntos o nodos o, simplemente, que su expresión analítica sea suficientemente complicada para realizar el mencionado proceso. Este problema se puede resolver sustituyendo la función f por otra función g suficientemente “sencilla” que “imite” a la anterior en algún sentido; para ello es preciso matizar los dos detalles siguientes:

- 1) Hay que fijar un conjunto C al que pertenecerá la función g .
- 2) Establecer rigurosamente el criterio de aproximación a f .

Entonces, se habla de un **problema de interpolación** en el caso de que se exija que los valores de la función f (y posiblemente de sus derivadas) coincidan con los de la función buscada g en algunos nodos.

Se llama **problema de aproximación** al siguiente: Sea U un subconjunto de un espacio vectorial E con una métrica $d(-, -)$ (generalmente, un espacio normado) y $f \in E$. Se trata de hallar, si existe, un elemento $g \in U$ tal que

$$d(f, g) = \inf_{v \in U} d(f, v)$$

2 La mejor aproximación

Resolveremos aquí el problema de aproximar una función f dada mediante funciones de unas ciertas características.

Generalmente, f es un elemento de un espacio vectorial normado E , que se intenta aproximar mediante elementos de un subconjunto U de E .

Si U es denso en E (es decir, si la clausura de U coincide con E), f puede aproximarse tanto como se quiera por elementos de U , ya que existe una sucesión $\{u_n\}$ en U tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = f$.

Si U no es denso en E (es decir, la clausura de U está contenida estrictamente en E),

$$d(f, U) = \inf_{v \in U} d(f, v) \geq 0.$$

Entonces, si existe $g \in U$ tal que $d(f, g) = d(f, U)$, se dice que g es **una mejor aproximación de f en U** . Naturalmente, el significado de “mejor aproximación” depende de la norma escogida para el problema concreto.

Uno de los puntos importantes en este terreno es saber si tal mejor aproximación existe o no. Veamos el siguiente resultado.

Teorema 2.1 *Sea E un espacio vectorial normado, si U es un subespacio de dimensión finita, entonces, cada elemento de E posee al menos una mejor aproximación en U .*

La demostración puede verse en Kincaid-Cheney, pg. 369.

En general, una mejor aproximación no tiene por qué ser única. Por ejemplo, al aproximar la función $f(x) = \cos x$ sobre el intervalo $[0, \pi/2]$ mediante una función $g(x) = \lambda x$, donde λ es una constante arbitraria, resulta que, si la norma adoptada es la del máximo, cualquier recta de las mencionadas es una mejor aproximación. Ver figura 1.

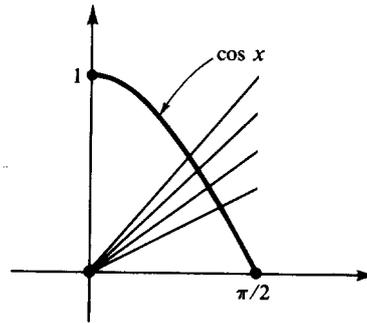


Figure 1.— Aproximación de $\cos x$ por λx .

El proceso de obtener mejores aproximaciones, normalmente lleva consigo la resolución de un sistema de ecuaciones no lineales. Sin embargo, en el caso importante que vamos a considerar, solamente se requiere la resolución de un sistema lineal. Este caso es aquel en que E es un espacio vectorial con producto escalar. Recordamos que

Definición 2.2 *Se denomina espacio vectorial con producto escalar (o interior), también espacio vectorial euclídeo, a un espacio vectorial en el que se ha definido una forma bilineal simétrica y definida positiva, que denotaremos por $\langle -, - \rangle$.*

Ejemplo 2.3 \mathbb{R}^n con

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

y $C[a, b]$, el espacio de las funciones continuas, con

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) w(x) dx$$

son espacios vectoriales con producto escalar.

Teorema 2.4 *Sea $U \leq E$, espacio vectorial con producto escalar. Sean $f \in E$ y $g \in U$, entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- i) $f - g \perp U$
- ii) g es una mejor aproximación a f sobre U .

Dem.: i) \Rightarrow ii). Sea $h \in U$, se tiene:

$$\|f - h\|^2 = \|(f - g) + (g - h)\|^2 = \|f - g\|^2 + \|g - h\|^2 \geq \|f - g\|^2.$$

ii) \Rightarrow i). Sea $h \in U$ y $\lambda > 0$. Se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|f - g + \lambda h\|^2 - \|f - g\|^2 \\ &= \|f - g\|^2 + 2\lambda \langle f - g, h \rangle + \lambda^2 \|h\|^2 - \|f - g\|^2 \\ &= \lambda(2 \langle f - g, h \rangle + \lambda \|h\|^2). \end{aligned}$$

Haciendo $\lambda \rightarrow 0$, se obtiene que $\langle f - g, h \rangle \geq 0$. Como la misma desigualdad debe ser satisfecha por $-h$, también se tiene: $\langle f - g, h \rangle \leq 0$; luego, $\langle f - g, h \rangle = 0$; pero como h es arbitraria en U , se cumple que $f - g \perp U$. ■

El sistema de ecuaciones lineales que resulta al expresar la condición i) respecto de alguna base de U se denomina **ecuaciones normales**; si $\{u_j\}$ es la base de U , estas se pueden escribir en la forma:

$$\langle g, u_j \rangle = \langle f, u_j \rangle, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Ejemplo 2.5 Aproximar $f(x) = \sin x$ en $[-1, 1]$ por $c_1x + c_2x^3 + c_3x^5$ considerando la norma

$$\|f\| = \left\{ \int_{-1}^1 [f(x)]^2 dx \right\}^{1/2}$$

Soluc.: Podemos tomar como U el subespacio engendrado por los polinomios x, x^3, x^5 que componen una base de U . Por lo tanto, las ecuaciones normales serán en este caso:

$$c_1 \langle x, x^{2j-1} \rangle + c_2 \langle x^3, x^{2j-1} \rangle + c_3 \langle x^5, x^{2j-1} \rangle = \langle f, x^{2j-1} \rangle, \quad j = 1, 2, 3$$

que componen un sistema lineal que se puede escribir en la forma matricial siguiente:

$$Ac = b,$$

siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/5 & 1/7 \\ 1/5 & 1/7 & 1/9 \\ 1/7 & 1/9 & 1/11 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \alpha - \beta \\ -3\alpha + 5\beta \\ 65\alpha - 101\beta \end{pmatrix}, \quad \alpha = \sin 1, \quad \beta = \cos 1,$$

después de haber calculado las integrales debidas. Resolviendo el sistema se obtiene: $c_1 \approx 348.9$, $c_2 \approx -1491.1$, $c_3 \approx 1275.6$. El tamaño de las soluciones indica que el problema puede estar mal condicionado, como de hecho así es, ya que $K_\infty(A) = 295.313$.

Ese mal condicionamiento suele ser frecuente cuando se utilizan polinomios respecto de la base natural. En general, es conveniente considerar otras bases, por ejemplo, ortonormales.

Si la base $\{u_j\}$ considerada en U es una base ortonormal se cumple: $\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$ y, si expresamos el elemento g en dicha base mediante: $g = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$, las ecuaciones normales serán en este caso:

$$a_1 \langle u_1, u_j \rangle + \dots + a_n \langle u_n, u_j \rangle = \langle f, u_j \rangle, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

es decir,

$$a_j = \langle f, u_j \rangle, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

lo que quiere decir que g es la suma de las proyecciones ortogonales de f sobre los vectores de la base, o sea, la proyección ortogonal sobre U , como implícitamente se encuentra contenido en el teorema 2.4.

En el ejemplo precedente, se puede considerar la base de polinomios ortogonales de Legendre (ortonormada respecto del producto escalar mencionado) siguiente:

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x/\sqrt{2/3} \\ P_2(x) &= (5x^3 - 3x)\sqrt{2/3} \\ P_3(x) &= (63x^5 - 70x^3 + 15x)/\sqrt{2/11} \end{aligned}$$

y buscar el polinomio $g(x) = a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) + a_3 P_3(x)$. En este caso obtendríamos, con mucho menor esfuerzo computacional, la siguiente solución: $a_1 \approx 0.73731$, $a_2 \approx -6.7391 * 10^{-2}$, $a_3 \approx 2.2904 * 10^{-2}$.

3 El problema del ajuste

Un planteamiento muy común en las ciencias experimentales conduce también a problemas de Aproximación.

Sea cierto fenómeno descrito por la variable dependiente y , la variable independiente t y ciertos parámetros a_1, \dots, a_n , todo ellos reales y relacionados mediante la ecuación:

$$y = \phi(t; a_1, \dots, a_n), \quad (1)$$

que se supone conocida. Por ejemplo, experimentalmente se sabe que la cantidad de sustancia radiactiva en una muestra en un instante dado está definida por la ecuación

$$y = a_1 e^{-a_2 t},$$

donde los parámetros a_1, a_2 dependen de la muestra concreta.

Interesa, pues, determinar los parámetros, para lo cual se dispone de tantas medidas experimentales como se quiera, en general, muchas más que parámetros a determinar. Los parámetros deben verificar las relaciones

$$y_j = \phi(t_j; a_1, \dots, a_n), \quad j = 1, 2, \dots, m \gg n \quad (2)$$

Debido a que el modelo matemático considerado no es absolutamente preciso y a que las medidas realizadas no son exactas, las igualdades (2) no se cumplen. Se plantea entonces determinar el valor de los parámetros a_1, \dots, a_n (es decir, ajustar) de forma que el vector de primeros miembros y el de segundos miembros de (2) estén a la mínima distancia en el sentido de alguna norma de \mathbb{R}^m .

Utilizando este procedimiento, Kepler descubrió, en 1601, su tercera ley a partir de observaciones de los periodos y las distancias al Sol de los cuatro primeros planetas.

Los criterios de aproximación más habituales son los asociados a las normas siguientes:

$$\begin{aligned} \text{Error máximo:} & E_\infty(\phi) = \max_{1 \leq k \leq m} \{|\phi(t_k) - y_k|\} \\ \text{Error medio:} & E_1(\phi) = \frac{1}{m} \sum_{1=k}^m |\phi(t_k) - y_k| \\ \text{Error cuadrático medio (RMS):} & E_2(\phi) = \left[\frac{1}{m} \sum_{1=k}^m |\phi(t_k) - y_k|^2 \right]^{1/2} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.1 Comparar las tres medidas anteriores de los errores al ajustar la función lineal $y = \phi(x) = 8.6 - 1.6x$ a los puntos: $(-1, 10)$, $(0, 9)$, $(1, 7)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 0)$, y $(6, -1)$.

Soluc.:

$$\begin{aligned} E_\infty(\phi) &= \max\{0.2, 0.4, 0.0, 0.2, 0.8, 0.6, 0.0\} = 0.8, \\ E_1(\phi) &= \frac{1}{8} 2.6 = 0.325, \\ E_2(\phi) &= \left[\frac{1.4}{8} \right]^{1/2} \approx 0.41833. \blacksquare \end{aligned}$$

Se puede ver que el error mayor es el del máximo, el peor de los puntos determina el error; $E_1(\phi)$ es el promedio de los errores de todos los puntos, es fácil de calcular; el error cuadrático suele utilizarse cuando los errores son de tipo estadístico.

3.1 El problema lineal de los mínimos cuadrados

Si consideramos que la función ϕ es lineal en los parámetros, las ecuaciones (2) toman la forma

$$Ax = b, \tag{3}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ que juega el papel de los parámetros a_i , $b \in \mathbb{R}^m$ y $A \in M_{\mathbb{R}}(m, n)$. Supondremos que $m > n$ y que $\text{rg } A = n$. Se ha planteado así un problema lineal que carece de solución.

Hemos llegado al **problema lineal de los mínimos cuadrados**, que se formula de la siguiente manera:

Dado un vector $b \in \mathbb{R}^m$ y una matriz $A \in M_{\mathbb{R}}(m, n)$, $m > n$ y $\text{rg } A = n$, determinar $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que haga mínima la norma euclídea del vector residuo definido por

$$r(x) = b - Ax$$

Observemos que esto es equivalente a encontrar la mejor aproximación a b sobre el espacio vectorial

$$M = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

engendrado por las columnas v_i de A , que es de dimensión n .

Aplicando el teorema 2.4 que caracteriza la mejor aproximación, resulta:

$$\langle b - Ax^*, v_i \rangle = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

o, equivalentemente:

$$A^T Ax^* = A^T b$$

4 Aproximación mediante polinomios

En diversas situaciones anteriores hemos considerado polinomios. De sobras son conocidos sus inconvenientes (sus oscilaciones, dan lugar a mal condicionamiento en los problemas de aproximación, etc.) y sus ventajas (tienen expresiones analíticas sencillas, tanto ellos como sus derivadas son fáciles de evaluar, etc.). También tienen alguna ventaja de tipo teórico como se refleja en el siguiente resultado.

Teorema 4.1 (de Weierstraß) *Si f es una función real continua en un intervalo compacto $[a, b]$, dado $\epsilon > 0$ existe un polinomio $p(x)$ tal que*

$$|f(x) - p(x)| \leq \epsilon, \quad \forall x \in [a, b]$$

Dem.: Puede verse en cualquier libro de Análisis matemático. ■

Para desarrollar la demostración anterior, que es constructiva, se utilizan los denominados **polinomios de Bernstein** relativos a la función f definidos mediante:

$$B_n(x, f) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (4)$$

4.1 El polinomio de Taylor

Un problema muy familiar, como es el determinar el polinomio de Taylor, puede plantearse como un problema de aproximación en los siguientes términos:

Teorema 4.2 (de Taylor) *Si f es una función real definida en un intervalo compacto $[a, b]$ y derivable n veces en él, dado $x_0 \in [a, b]$ existe un único polinomio $p(x)$ de grado n tal que*

$$p_n^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0), \quad j = 0, 1, \dots, n$$

Dem.:

Basta resolver el sistema compatible determinado que resulta al expresar las hipótesis.

■

Ya que el número de parámetros a determinar coincide con el número de condiciones, realmente, este es un problema de interpolación, pues se conocen valores de la función y de sus derivadas en un punto. También es conocida de otros cursos anteriores la expresión del “error de interpolación”