1.III.2 Método de Bairstow.

Manuel Palacios

Departamento de Matemática Aplicada. Centro Politécnico Superior

Universidad de Zaragoza

Otoño 2007

Contents

Referencias

[1] Mathews, J. H.: El método de Lin_Bairstow. *http://math.fullerton.edu/mathews/n2003/BairstowMethodMod.html*.

[2] Stoer, J. and Bulirsch, R.: Introduction to Numerical Analysis. *Springer-Verlag*, 1985.

[3] Gasca, M.: Cálculo numérico: resolución de ecuaciones y sistemas. *Librería Central*, 1987.

[4] Conde, C. y Winter, G.: Métodos y algoritmos del álgebra numérica. *Editorial Reverté*, 1990.

1 Método de Bairstow

El método consiste en un procedimiento para el cálculo de las raíces de un polinomio buscando factores cuadráticos $x^2 - r\,x - s$ del mismo, es decir, tales que

$$p(x) = (x^2 - r\,x - s)\,p_1(x)$$

Evidentemente, si $x^2 - r\,x - s$ no es un factor cuadrático de $p(x)$, se tendrá:

$$p(x) = (x^2 - r\,x - s)\,p_1(x) + B\,(x - r) + A,$$

siendo A y B funciones de r y de s, de forma que el método consiste en encontrar los valores de r y s que hacen

$$\begin{array}{rcccl} A & = & A(r,s) & = & 0 \\ B & = & B(r,s) & = & 0 \end{array} \tag{1}$$

Para ello, se aplica el método de Newton-Raphson en la forma conocida, lo que conlleva la evaluación de la matriz jacobiana del sistema (1), así como de las funciones A y B, en cada iteración.

Un modo de realizar dichas evaluaciones, ya que la forma explícita de las funciones $A(r,s)$ y $B(r,s)$ no es conocida explícitamente, es tener en cuenta (como se puede comprobar, cf. [1, 2]) que las derivadas parciales de A y B con respecto a r y a s son:

$$\begin{array}{rcll} A_r & = & c_1, & \quad A_s = c_2 \\ B_r & = & c_2, & \quad B_s = c_3, \end{array} \tag{2}$$

y los valores de A y B son:

$$A(r,s) \;=\; b_0, \qquad B(r,s) = b_1, \tag{3}$$

donde los coeficientes b y c deben ser calculados mediante el siguiente proceso, similar al de Hörner, que se obtiene al desarrollar los productos siguientes e identificar los coeficientes de las distintas potencias de x.

En efecto, sean

$$p(x) = a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + a_1\,x + a_0 = (x^2 - r\,x - s)\,p_1(x) + B\,(x - r) + A, \tag{4}$$

$$p_1(x) = b_n\,x^{n-2} + b_{n-1}\,x^{n-3} + \ldots + b_3\,(x - r) + b_2 = (x^2 - r\,x - s)\,p_2(x) + c_3\,(x - r) + c_2, \tag{5}$$

$$p_2(x) = c_n\,x^{n-4} + c_{n-1}\,x^{n-5} + \ldots + c_5\,x + c_4 \tag{6}$$

$$b_n = a_n$$
$$b_{n-1} = a_{n-1} + r\,b_n$$
$$b_k = a_k + r\,b_{k+1} + s\,b_{k+2}, \qquad k = n-2, \ldots, 1, 0$$

$$c_n = b_n$$
$$c_{n-1} = b_{n-1} + r\, c_n$$
$$c_k = b_k + r\, c_{k+1} + s\, c_{k+2}, \quad k = n-2, \ldots, 1$$

La obtención de las derivadas parciales de A y B puede conseguirse en la forma siguiente. Derivando con respecto a r y a s la identidad (4) se obtiene:

$$\frac{\partial p(x)}{\partial r} \equiv 0 = (x^2 - rx - s)\,\frac{\partial p_1(x)}{\partial r} - x\, p_1(x) + B_r\,(x-r) - B + A_r \tag{7}$$
$$\frac{\partial p(x)}{\partial r} \equiv 0 = (x^2 - rx - s)\,\frac{\partial p_1(x)}{\partial s} - p_1(x) + B_s\,(x-r) + A_s \tag{8}$$

Suponiendo que la ecuación $x^2 - rx - s = 0$ tiene dos raíces distintas x_1, x_2, de (5) se obtiene

$$p_1(x_j) = c_3\,(x_j - r) + c_2, \quad j = 1, 2,$$

Sustituyendo, ahora, en (7) y (8) resulta para $j = 1, 2$:

$$-x_j\,(c_3\,(x_j - r) + c_2) + B_r\,(x_j - r) - B + A_r = 0$$
$$-(c_3\,(x_j - r) + c_2) + B_s\,(x_j - r) + A_s = 0$$

De la segunda ecuación se deduce inmediatamente que:

$$A_s = c_2, \quad B_s = c_3$$

Y de la primera:

$$A_r = b_1 + r\, c_2 + s\, c_3 = c_1, \quad B_r = c_2$$

En consecuencia, el algoritmo del método se puede concretar en la forma siguiente.