Cálculo numérico (Ingeniería Industrial, Informática y Química)

Todos los grupos

8 de septiembre de 2009 Segunda convocatoria

Ejercicio 1

Dado el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$A\,x = b, \qquad A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) Teniendo en cuenta el tipo de matriz, justificar que se puede obtener la factorización de Choleski de la matriz A anterior. ¿Cuántas operaciones elementales requiere la resolución del sistema por dicho método?. Encontrar la factorización de Choleski de la submatriz

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & -1 \\ 0 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

(1 punto)

b) Demostrar que se puede aplicar el método del gradiente conjugado para la resolución del sistema anterior. ¿Es adecuado comenzar las iteraciones con $\boldsymbol{x}_0 = (1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)$?. Ejecutar dos iteraciones de dicho método para el subsistema

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

partiendo de $x_0 = (0,0)^T$. *(1 punto)*

Ejercicio 1

Se considera el método iterativo siguiente:

$$\begin{cases} x_0 \text{dado}, \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$

con $g(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{9}{2\,x}$.

a) Deterrminar los puntos fijos de $g(x)$ y el orden de convergencia a cada uno de los puntos fijos (suponinedo que el punto inicial x_0 se elige de manera que el método sea convergente). *(0.75 puntos)*

b) Estudiar si se puede asegurar la convergencia del método, indicando el punto fijo al que converge, en los casos en que el punto inicial es $x_0 = 1$ y $x_0 = 2$. *(1 punto)*

c) Suponiendo que el método iterativo es el de Newton, determinar la ecuación $f(x) = 0$ que se pretende resolver. *(0.75 puntos)*

Ejercicio 1

a) Se considera el método Runge-Kutta siguiente:

$$\begin{array}{c|cc} \beta & \beta-1 & 1 \\ \beta+1 & 0 & \beta+1 \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array}$$

con $g(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{9}{2\,x}$. . *(0.75 puntos)*

i) ¿Existe algún valor de β para el cual el RK sea explícito?. *(0.5 puntos)*

i) ¿Para qué valores de b_1, b_2, β el método es convergente de orden 2?. *(0.75 puntos)*

b) Calcula el grado de precisión de la fórmula de integración

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{1}{9}(5\,f(-\sqrt{0.6}) + 8\,f(0) + 5\,f(\sqrt{0.6}))$$

. *(1.25 puntos)*

Ejercicio 1

Una empresa de transporte desea analizar el consumo de combustible dependiendo del peso transportado. Se han tomado diversos datos, que se encuentran recogidos en la tabla siguiente:

s_i=cpmbustible(en litros)	5	6	7	8	9
$f(x_i)$peso en Kg)	36.7	37.1	38.3	39.7	40.7

a) Se desea interpolar los datos correspondientes al gasto entre 5 y 8 litros mediante un polinomio de grado 3. Calcularlo por dos formas diferentes. *(1 punto)*

b) Se quiere añadir el dato correspondiente al gasto de 9 litros de combustible. ¿Cuál sería la mejor forma de obtener el polinomio de interpolación de grado 4?. Calcularlo. *(1 punto)*

c) Usando los datos de 5 a 8 litros, obtener mediante interpolación inversa una aproximación del gasto de combustible para transportat 38 Kg.. *(1 punto)*

Soluciones

1.a) La matriz es simétrica y diagonal dominante, por lo que es definida positiva y, en consecuencia, se puede obtener la factorización de Choleski.
Choleski. Diagonalizando por congruencias o factorizando LU, lo que conlleva el coste computacional que se indica más abajo, se obtiene:

$$A = H\,H^T, \text{ siendo } \quad H = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{2}} & \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{7}{2}} & 0 \\ 0 & -\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2}{7}} & \dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{31}{7}} \end{bmatrix}$$

Coste computacional. Teniendo en cuenta que A es tridiagonal simétrica, la transformación de A en la matriz unidad, como hemos visto, solo requiere 4 operaciones elementales de congruencia

$$a_{i+1} = a_{i+1} - l_{i+1i} \cdot a_i$$

más cinco divisiones.

Luego, en total, se realizarán $4 \cdot (1\,\text{división} + 2\,\text{multiplicaciones} + 2\,\text{sumas}) + 5\,\text{divisiones} =$ 25 operaciones para obtener la factorización de Cholesksi.

Para resolver el sistema hacen falta además resolver los dos sistemas triangulares correspondientes que requieren 13 operaciones aritméticas elementales adicionales cada uno.

1.b) El método del gradiente conjugado se puede aplicar para matrices simétricas definidas positiva con un vector inicial cualquiera. Como la matriz A es simétrica y diagonal dominante, es definida positiva. Por lo tanto, el método se puede aplicar con ese vector inicial.

Dos iteraciones. Observar que por el teorema de convergencia, ésta se realizará en 2 iteraciones, es decir, en 2 iteraciones se obtendrá la solución exacta (x, y) = (5/3, 4/3)

$$\begin{aligned}
&k = 0; \quad x_k = (0,0) \\
&r_k = v_k = b - A.x_k = (2,1) \\
&t_k = r_k.r_k/(v_k.A.v_k) = 5/6 \\
&x_{k+1} = x_k + t_k v_k = (5/3, 5/6) \\
&r_{k+1} = b - A.x_{k+1} = (-1/2, 1) \\
&k = 1 \\
&\alpha_k = r_{k+1} \cdot r_{k+1}/(r_k \cdot r_k) = 1/4 \\
&v_k = r_{k+1} + \alpha_k\, v_k = (0, 5/4) \\
&t_k = r_k.r_k/(v_k.A.v_k) = 2/5 \\
&x_{k+1} = x_k + t_k v_k = (5/3, 4/3) \\
&r_{k+1} = b - A.x_{k+1} = (0,0) \\
&k = 2 \\
&\alpha_k = r_{k+1} \cdot r_{k+1}/(r_k \cdot r_k) = 0 \\
&v_k = r_{k+1} + \alpha_k\, v_k = (0,0)
\end{aligned}$$

(2)

(a) $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{9}{2x} = x \Rightarrow 2x^2 - x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \boxed{x = \pm 3}$

(b) $g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{9}{2x^2}$

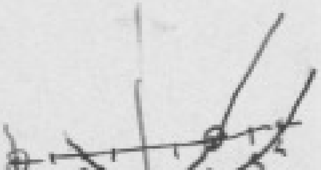
$g'(x) = 0 \Rightarrow p \geq 2$

$g''(x) = \frac{1}{x^3} \neq 0$ $\Rightarrow \boxed{p = 2}$

$|g'(x)| = \left|\frac{1}{2} - \frac{9}{2x^2}\right| < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{1}{2} - \frac{9}{2x^2} < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{x^2-9}{2x^2} < 1$

$\Leftrightarrow -2x^2 < x^2 - 9 < 2x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x^2 + \cancel{2x} + 9 \\ 3x^2 - \cancel{2x} - 9 \geq 0 \end{cases}$

$x = \pm\sqrt{3}$



3/ a)

$$\begin{array}{c|cc} \beta & \beta-1 & 1 \\ \beta+1 & 0 & \beta+1 \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array}$$

i/ No puesto que $a_{12} \neq 0 \ \forall \beta$.

ii/ Orden 2

$$\left.\begin{array}{l} b^T e = 1 \iff b_1 + b_2 = 1 \\ b^T c = 1/2 \iff b_1 \beta + b_2(\beta+1) = 1/2 \end{array}\right\} (b_1+b_2)\beta + b_2 = \tfrac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} b_2 = \frac{1}{2} - \beta \\ b_1 = \frac{1}{2} + \beta \end{array}}$$

Orden 3

$$\begin{cases} b^T e = 1 \\ b^T c = 1/2 \end{cases} > \quad b_2 = 1/2 - \beta, \quad b_1 = 1/2 + \beta$$

$$b^T c^2 = 1/3 \iff b_1 \beta^2 + b_2 (\beta+1)^2 = 1/3 \qquad (1)$$

$$b^T A c = 1/6 \iff b_1(\beta^2+1) + b_2(\beta+1)^2 = 1/6 \qquad (2)$$

$(2)-(1) \Rightarrow b_1 = -1/6$

$\frac{1}{2} + \beta = -1/6 \Rightarrow \beta = -2/3, \ b_2 = 7/6$

Para este β, comprobamos si se cumplen (1) y (2):

(1) $\left(-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{-2}{3}\right)^2 + \frac{7}{6}\left(-\frac{2}{3}+1\right)^2 \neq \frac{1}{3}$ NO

(2) $-\frac{1}{6}\left(\left(\frac{-2}{3}\right)^2+1\right) + \frac{7}{6}\left(\frac{-2}{3}+1\right) = \frac{-1}{9} \neq 1/6$ NO

$\nexists$ ningún método de orden 3.

b) Grado de precision:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq \frac{1}{9}\left[5f(-\sqrt{0.6})+8f(0)+5f(\sqrt{0.6})\right]$$

- $f(x)=1$

$$\int_{-1}^{1} dx = 2 \simeq \frac{1}{9}\left[5+8+5\right]$$ ✓

- $f(x)=x$

$$\int_{-1}^{1} x\,dx = 0 \simeq \frac{1}{9}\left[-5\sqrt{0.6}+5\sqrt{0.6}\right]$$ ✓

- $f(x)=x^2$

$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3} \simeq \frac{1}{9}\left[5(0.6)+0+5(0.6)\right]$$ ✓

- $f(x)=x^3$

$$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0 \simeq \frac{1}{9}\left[-5(0.6)^{3/2}+0+5(0.6)^{3/2}\right]$$ ✓

- $f(x)=x^4$

$$\int_{-1}^{1} x^4\,dx = \frac{2}{5} \simeq \frac{1}{9}\left[5\cdot(0.6)^2+0+5\cdot(0.6)^2\right]=0.4$$ ✓

4.)

x_i	5	6	7	8	9
$f(x_i)$	36.7	37.1	38.3	39.7	40.7

a) Gasto entre 5 y 8 con $P_3(x)$.

$$
\begin{array}{llccccccc}
x_0=5 & 36.7 & & & & & & & \\
 & & > 0.4 & & & & & & \\
x_1=6 & 37.1 & & > 0.4 & & & & & \\
 & & > 1.2 & & > -0.1 & & & & \\
x_2=7 & 38.3 & & > 0.1 & & > 0 & & & \\
 & & > 1.4 & & > -0.1 & & & & \\
x_3=8 & 39.7 & & > -0.2 & & & & & \\
 & & > 1.0 & & & & & & \\
x_4=9 & 40.7 & & & & & & &
\end{array}
$$

$f[x_0,x_1]=0.4$, $f[x_0,x_1,x_2]=0.4$, $f[x_0,x_1,x_2,x_3]=-0.1$

i) Fórmula de Newton

$$
\begin{aligned}
P_3(x) &= f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+ \\
&\quad + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\
&= 36.7+0.4(x-5)+0.4(x-5)(x-6)-0.1(x-5)(x-6)(x-7)
\end{aligned}
$$

ii) Fórmula de Lagrange

$$
\begin{aligned}
P_3(x) &= f(x_0)\,l_0(x)+f(x_1)\,l_1(x)+f(x_2)\,l_2(x)+f(x_3)\,l_3(x) = \\
&= 36.7\,l_0(x)+37.1\,l_1(x)+38.3\,l_2(x)+39.7\,l_3(x)
\end{aligned}
$$

con $l_i(x)=\prod_{\substack{j=0\\ i\neq j}}^{3}\left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right)$

La forma más adecuada es la de Nw.

$$p_4(x) = p_3(x) + f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

$$= p_3(x)$$

c) Interpolación inversa

y	36.7	37.1	38.3	39.7
$f^{-1}(y)$	5	6	7	8

$$\begin{array}{llllll}
36.7 & 5 & & & & \\
 & & 2.5 & & & \\
37.1 & 6 & & -1.0417 & & \\
 & & 0.8333 & & 0.3320 & \\
38.3 & 7 & & -0.0458 & & \\
 & & 0.7143 & & & \\
39.7 & 8 & & & &
\end{array}$$

$$p(y) = 5 + 2.5(x-36.7) - 1.0417(x-36.7)(x-37.1) +$$
$$+ 0.3320(x-36.7)(x-37.1)(x-38.3)$$

$$p(38) = 5 + 2.5(1.3) - 1.0417(1.3)(0.9) + 0.3320(1.3)(0.9)(-0.3) =$$
$$= 6.91468 \text{ litros.}$$