Cálculo numérico (Ingeniería Industrial, Informática y Química)

16 de septiembre de 2008 Segunda convocatoria

Ejercicio 1

Dada una función $f \in \mathcal{C}^3(\mathbf{R}^3)$ y los nodos $x_0 = 0, x_1 = h$ y $x_2 2h$ con $h > 0$, se pide:

a) Determinar el polinomio de interpolación de $f(x)$ en los nodos considerados. *(0.5 puntos)*

b) Utilizando el polinomio de interpolación encontrado, obtener la fórmula de derivación de tipo interpolatorio que aproxima $f'(x)$. *(0.75 puntos)*

c) Calcular la expresión del error y dar el orden de la fórmula de derivación anterior. *(0.75 puntos)*

Ejercicio 2

Dada la matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} \mu+1 & 2\sqrt{2} & \mu-1 \\ 2\sqrt{2} & 2(\mu+1) & 0 \\ a-1 & 0 & \mu+1 \end{bmatrix}$$

a) Realizar una iteración del método de Jacobi que transforme A en la matriz tridiagonal(es decir, que anule los elementos a_{13} y a_{31}):

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2(\mu+1) & 2 \\ 0 & 2 & 2\mu \end{bmatrix}$$

¿Qué relación hay entre los valores propios de B y A?. Justifica tu respuesta. *(0.75 puntos)*

b) Determinar en qué intervalo se encuentran contenidos los valores propios de B (sin calcularlos) para $\mu = 1$ y $\mu = -1$. ¿Se puede asegurar que B es definida positiva para estos valores del parámetro μ?. *(0.75 puntos)*

c) Partiendo del vector inicial $x^{(0)} = (1, 1, 0)^T$, se realizan 5 iteraciones con el método adecuado para aproximar el valor propio dominante y un vector propio asociado de la matriz simétrica B para $\mu = 1$. ¿Se observa convergencia?. Explica qué ocurre en este caso. *(0.75 puntos)*

d) Partiendo del vector inicial $x^{(0)} = (1, 0, 1)^T$, realiza 45 iteraciones con la versión estándar del método de la potencia a la matriz B para $\mu = -1$. ¿Se observa convergencia?. Explica qué ocurre en este caso. *(0.75 puntos)*

Ejercicio 3

Se desea calcular la integral siguiente:

$$\int_{-1}^{2} (x^2 + E[x])\, dx,$$

donde $E[x]$ es la función parte entera de x, definida por:

$$E[x] = k, \text{ con k el único entero tal que } k \leq x < k+1.$$

a) Obtener las aproximaciones a esta integral que se obtienen al aplicar la fórmula compuesta de Simpson con 3, 5 y 7 nodos, respectivamente *(1.5 puntos)*

b) Razona cuál de los tres métodos anteriores da la mejor solución. *(0.75 puntos)*

c) Razona si puedes obtener una expresión del error para la fórmula compuesta de Simpson con 7 nodos utilizando las expresiones conocidas del error. *(0.75 puntos)*

Ejercicio 4 (Prácticas)

Se la ecuación $x^3 + x - 9 = 0$:

a) Demostrar que tiene una única raíz x^* en el intervalo $[1,\, 2]$ *(0.5 puntos)*

b) ¿Cuántas iteraciones deberían hacerse al menos con el método de bisección para que el error cometido $|x_n - x^*|$ sea menor que 10^{-5}?. *(0.5 puntos)*

c) Obtener la aproximación de x^* que da el método de bisección tras realizar cuatro iteraciones. *(0.5 puntos)*

d) Partiendo de $x_0 = 2$, realizar las iteraciones del método de Newton necesarias hasta que, por primera vez, el error $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-5}$?. En este caso, ¿cuál es la aproximación a x^* que se obtiene?. *(0.5 puntos)*

Soluciones

1.a)

$$\begin{array}{c|c|c|c}
x_0 = 0 & f(0) & & \\
x_1 = h & f(h) & \dfrac{f(h)-f(0)}{h} & \\
x_2 = 2h & f(2h) & \dfrac{f(2h)-f(h)}{h} & \dfrac{f(2h)-2f(h)+f(0)}{2h^2}
\end{array}$$

$$p_2(x) = f(0) + \frac{f(h)-f(0)}{h}\,x + \frac{f(2h)-2f(h)+f(0)}{2h^2}\,x\,(x-h)$$

1.b)

$$p_2'(x) = \frac{f(h)-f(0)}{h} + \frac{f(2h)-2f(h)+f(0)}{2h^2}\,(2\,x-h)$$

$$p_2'(0) = \frac{f(h)-f(0)}{h} + \frac{f(2h)-2f(h)+f(0)}{2h^2}\,(-h)$$

$$f'(0) \approx p_2'(0) = \frac{-f(2h)+4f(h)-3f(0)}{2h}$$

1.c) Por la teoría de la interpolación:

$$f(x) = p_2(x) + E(x), \quad \text{con } E(x) = \frac{f'''(\eta_x)}{3!}\,x\,(x-h)\,(x-2h)$$

$$f'(x) = p_2'(x) + E'(x)$$

siendo

$$E'(x) = \frac{(f'''(\eta_x))'}{3!}\,x\,(x-h)\,(x-2h) + \frac{f'''(\eta_x)}{3!}\,((x-h)\,(x-2h) + x\,(x-2h) + x\,(x-h))$$

$$E'(0) = \frac{f'''(\eta_x)}{3!}(2h^2+0+0) = \frac{h^2}{3}\,f'''(\eta)$$

$$f'(0) - p_2'(0) = E'(0) = \mathcal{O}(h^2) \Longrightarrow \text{orden 2.}$$

2.a) Hay que encontrar Q tal que $B = Q^T\,A\,Q$ con $b_{13} = 0$

Escogemos: $\beta = \dfrac{a_{11}-a_{33}}{2aa_{13}} = \dfrac{0}{2(\mu-1)} = 0, \quad t = \beta \pm \sqrt{1+\beta^2} = \pm 1$ tomamos t = 1.

$$c = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad s = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$Q = \begin{bmatrix} c & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \Longrightarrow B = Q^T\,A\,Q = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2(\mu+1) & 2 \\ 0 & 2 & 2\mu \end{bmatrix}$$

2.b) Para $\mu = 1 \to B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow C_1 = C_3 = \{|z-2| \le 2\}, C_2 = \{|z-4| \le 4\}$

es decir, que por ser B simétrica todos los valores propios están en el intervalo [0, 8], por lo que la matriz puede ser definida o semidefinida positiva.

Para $\mu = -1 \to B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \Longrightarrow C_1 = \{|z-2| \le 2\}, C_2 = \{|z-0| \le 4\}, C_3 = \{|z+2| \le 2\}$

es decir, que por ser B simétrica todos los valores propios están en el intervalo [-4, 4], por lo que no se puede afirmar que la matriz sea definida positiva.

2.c) Como la matriz B es simétrica aplicamos el algoritmo de la potencia para matrices simétricas (cf. Burden, 5 ed., pag. 511)

k	$x_0 = x/\|\|x\|\|_2 = (1,1,0)/\sqrt{2}$		
1	$y = Bx = (2.82843, 4.24264, 1.41421),$	$\mu = x.y = 5.$	$x = y/\|\|y\|\|_2 = (0.534522, 0.801784, 0.267$
2	$y = Bx = (2.67261, 4.8107, 2.13809),$	$\mu = x.y = 5.85714$	$x = y/\|\|y\|\|_2 = (0.452679, 0.814822, 0.362$
3	$y = Bx = (2.535, 4.88893, 2.35393),$	$\mu = x.y = 5.98361$	$x = y/\|\|y\|\|_2 = (0.423272, 0.81631, 0.3930$
4	$y = Bx = (2.47916, 4.89786, 2.4187),$	$\mu = x.y = 5.99817$	$x = y/\|\|y\|\|_2 = (0.413278, 0.816476, 0.403$
5	$y = Bx = (2.45951, 4.89886, 2.43935),$	$\mu = x.y = 5.9998$	$x = y/\|\|y\|\|_2 = (0.409927, 0.816494, 0.406$

La sucesión$\{\mu_k\}$ converge al valor propio dominante $\mu = 6$.

2.d) Aunque la matriz B es simétrica aplicamos el algoritmo de la potencia para matrices no simétricas (cf. Burden, 5 ed., pag. 508)

k	$x_0 = x/\|\|x\|\|_\infty = (1,0,1)$		$x = y/\|\|y\|\|_\infty$	$p_k = 1$
1	$y = Bx = (2,4,-2),$	$\mu = x_k^p = 2.$	$x = y/Max[y] = (1/2, 1, 1/2)$	2
2	$y = Bx = (3,0,3),$	$\mu = 0$	$x = (1,0,1)$	1
3	$y = Bx = (2,4,-2),$	$\mu = 2$	$x = (1/2, 1, 1/2)$	2

El proceso se repite y la sucesión$\{\mu_k\}$ no converge.

3.a) Hay que darse cuenta de que el integrando es una función discontinua en los puntos x = 0 y 1. Además, como la fórmula de Simpson es de orden 3, es decir, integra exactamente los polinomios de grado 3 o menor, integrará exactamente a la función integrando si los puntos 0 y 1 son nodos. Esto ocurre si el número de nodos es 7, por lo que en este caso se obtendrá el valor exacto de la integral, que no es otro que el valor que se obtendría al separar el intervalo de integración en tres subintervalos: [-1, 0], [0, 1] y [1, 2].

En concreto:

Con 3 nodos: n = 1, Simpson simple, h = 3

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx \approx \frac{1}{2}\,(f(-1) + 4\,f(\frac{1}{2} + f(2)) = \frac{7}{2}$$

Con 5 nodos: n = 2, Simpson simple, h = $\frac{3}{2}$

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx \approx \frac{3/2}{6}\,(f(-1) + 4\,f(\frac{-1}{4} + 2\,f(\frac{1}{2}) + 4\,f(\frac{5}{4}) + f(2)) = \frac{13}{4}$$

Con 7 nodos: n = 4, Simpson simple, h = 1

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx \approx \frac{1}{6}\,(f(-1) + 4\,f(\frac{-1}{2}) + 2\,f(0) + 4\,f(\frac{1}{2}) + 2\,f(1) + 4\,f(\frac{3}{2}) + f(2)) = \frac{7}{2}$$

3.b) Como el integrando es función discontinua:

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (x^2 - 1)\,dx + \int_{0}^{1} x^2\,dx + \int_{1}^{2} (x^2 + 1)\,dx = 3.$$

Así que la más exacta es la de 5 puntos.

3.c) No se puede aplicar la fórmula del error de la fórmula compuesta en el intervalo [-1,2] porque f no es de clase $\mathcal{C}^{(4}$ en ese intervalo, ya que noes ni siquiera continua. Tampoco se puede aplicar la fórmula del error de la fórmula simple en cada subintervalo [-1, 0], [0, 1], [1, 2] para luego sumarlos, por la misma razón, f no es de clase $\mathcal{C}^{(4}$ en esos subintervalos ya que no es continua en sus extremos.

4.1)

$$f(x) = x^3 + x - 9 \quad \text{continua en } \mathbb{R}\text{, luego en } [1,\ 2]$$
$$f(1)\, f(2) < 0$$

luego, por el teorema de Bolzano, existe una raíz en [1, 2].

Además, $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0, x \in [1, 2]$, es decir, f es estrictamente creciente en [1, 2], por lo que hay una sola raíz en [1, 2].

4.b)

$$|x_n - x^*| < \frac{b-a}{2^n} = 2^{-n} < 10^{-5}$$
$$-n \log 2 < -5 \rightarrow n > \frac{5}{\log 2} \approx 16.61$$

luego se necesitan al menos 17 iteraciones.

4.c) $x_0 = 2, x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \dfrac{2x_n^3 + 9}{3x_n^2 + 1}, \quad n = 0, 1, 2, ...$

$$\begin{array}{ll} x_1 = 1.923076 & |x_1 - x_0| \approx 0.0769 > 10^{-5} \\ x_2 = 1.92017913 & |x_2 - x_1| \approx 0.0029 > 10^{-5} \\ x_3 = 1.9291751213 & |x_3 - x_2| \approx 4.0146.10^{-6} < 10^{-5} \end{array}$$

$$x^* \approx x_3$$