

Cálculo Numérico (Ingeniería Industrial)

2 Septiembre 2002

Tercera convocatoria

Ejercicio 1

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz real de orden n estrictamente diagonal dominante, λ valor propio (cualquiera) de B_J , matriz de iteración del método de Jacobi que resuelve el sistema lineal $Ax = b$, $v = (v_1, \dots, v_n)^T$ vector propio de B_J asociado a λ verificando

$$|v_k| = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i| > 0$$

Se pide:

i) Demostrar que

$$|\lambda| \leq \frac{\sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}|}{|a_{kk}|}$$

(1.5 pts.)

ii) Aplicando el apartado anterior, probar que el método de Jacobi es convergente (0.5 pts.)

Ejercicio 2

Sean $x_0 < x_1$ dos números reales distintos y sea ε tal que $0 < \varepsilon < x_1 - x_0$.

i) Obtener un polinomio p_ε de grado 3 tal que

$$p_\varepsilon(x_0) = p_\varepsilon(x_0 + \varepsilon) = 1, \quad p_\varepsilon(x_1) = p_\varepsilon(x_1 + \varepsilon) = 0.$$

(1.25 pts.)

ii) Hallar la función $\varphi(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p_\varepsilon(x)$ (0.5 pts.)

iii) Calcular el polinomio de interpolación de Hermite de $\varphi(x)$ en x_0 y x_1 (0.75 pts.)

Ejercicio 3

De una función $f \in C^6(I)$ con $I = [2.2, 2.6]$ de la que se sabe que $|f^{(6)}(x)| \leq M$ y $|f^{(4)}(x)| \leq 10^{-4}M \forall x \in I$, se conocen los datos que figuran en la tabla siguiente:

x	2.2	2.4	2.6
$f(x)$	0.5207843	0.5104147	0.4813306
$f'(x)$	-0.0014878	-0.1004889	-0.1883635

Se desea calcular la integral:

$$\int_{2.2}^{2.6} f(x) dx$$

Se pide:

i) Obtener el spline cúbico sujeto (forzado) $S(x)$ que interpola f en los puntos dados (1.75 pts.)

ii) Encontrar una cota del error de integración que se comete al aproximar $f(x)$ por $S(x)$ (0.5 pts.)

- iii) Encuentra una cota del error de integración cuando se utiliza el polinomio de interpolación definido por los datos (0.75 pts.)
- iv) Razona cuál de los dos procedimientos de integración es más aconsejable y explica qué debería hacerse para aproximar la integral dada de acuerdo con el procedimiento más ventajoso (no hace falta que hagas operaciones, sólo expresar matemáticamente el proceso a seguir) (0.5 pts)

Ayuda:

$$\bullet \int_{x_0}^{x_2} (x - x_0)^2 (x - x_1)^2 (x - x_2)^2 dx = -\frac{1}{210} (x_0 - x_2)^5 (2x_0^2 - 7x_0x_1 + 7x_1^2 + 3x_0x_2 - 7x_1x_2 + 2x_2^2)$$

• Se sabe que si $f \in C^4[a, b]$ verificando $\max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)| \leq K$, $S(x)$ es el interpolante spline cúbico sujeto de f en los nodos $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, y $h = \max\{x_{j+1} - x_j \mid j = 0, 1, \dots, n-1\}$, se tiene:

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - S(x)| \leq \frac{5K}{384} h^4$$

Ejercicio 4

A partir de los datos del sistema:

$$\begin{pmatrix} d_1 & c_1 & & & & \\ a_1 & d_2 & c_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & a_{n-2} & d_{n-1} & c_{n-1} & \\ & & & a_{n-1} & d_n & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}$$

se ha construido el siguiente algoritmo:

Datos : $n, (a_i)_{i=1}^{n-1}, (b_i)_{i=1}^n, (c_i)_{i=1}^{n-1}, (d_i)_{i=1}^n$

Para $i = 2, 3, \dots, n$, hacer :

$$d_i = d_i - (a_{i-1}/d_{i-1})c_{i-1}$$

$$b_i = b_i - (a_{i-1}/d_{i-1})b_{i-1}$$

Se pide:

- i) Explicar razonadamente qué se consigue con la aplicación de este algoritmo (0.75 pts.)
- ii) Escribir el sistema lineal que queda tras la aplicación del algoritmo, comentando qué elementos han cambiado y en qué forma respecto del sistema inicial dado (0.5 pts.)
- iii) Completar el algoritmo con las órdenes necesarias para obtener la solución del sistema lineal obtenido en ii) (0.25 pts.)
- iv) Calcular el número total de operaciones elementales que requiere el algoritmo completo (el dado junto con el que lo has completado) (0.5 pts.)