CALCULO NUMERICO INDUSTRIALES

Tercera convocatoria 15–9–2001

P1) Sea el método RK (método de Euler mejorado) dado por su tabla de Butcher:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1/2 & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

i) Escribir sus ecuaciones. Expresándolas en la forma $y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h)$ y suponiendo que f es lipschitziana en y, probar que la función Φ es también lipschitziana en y. (1 punto)
ii) Hallar el orden del método. (0.5 puntos)
iii) Aplicar un paso del método a la ecuación $y' = t + y$. (0.5 puntos)
iv) Obtener la función de amplificación y el intervalo de estabilidad absoluta del método. ¿Es A-estable? (1 punto)

P2) Sea la fórmula de cuadratura

$$\int_0^b f(x)\,dx \simeq \frac{4h}{3}(2f(x_1) - f(x_2) + 2f(x_3)) \tag{1}$$

donde $h = \frac{b}{4}$, $x_j = jh$, $j = 1, 2, 3$.
i) Hallar su grado de precisión. Responder razonadamente si dicha fórmula es de tipo interpolatorio, de Newton-Cotes ó gaussiana. (1 punto)
ii) Sabiendo que la fórmula anterior es del tipo

$$\int_0^b f(x)\,dx = h\sum_{i=1}^{n-1} b_i f(ih) + h^{p+2} M f^{(p+1)}(\eta h)$$

donde p es su grado de precisión y M una constante, hallar el valor de M. Hallar una expresión del error en (1). (1 punto)

P3) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

i) Hallar una matriz de Householder H tal que HA sea triangular. (1 punto)
ii) Aplicar una etapa del método de Jacobi para obtener una matriz P ortogonal tal que $P^T AP$ sea diagonal. (1 punto)
iii) Deducir del apartado anterior los valores propios de A y una base de vectores propios. (1 punto)

C1) Para hallar las raíces del polinomio $p(x) = x^4 + x^2 - 6x + 2$ se ha aplicado el método de Newton con una tolerancia $TOL = 0.3 \times 10^{-9}$ y un número máximo de iteraciones igual a 100. Partiendo de los puntos 0.5 y 1.5, el algoritmo se para en la quinta iteración, y se obtiene la siguiente tabla:

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0.5	0.3472222222	0.3572970310	0.3573315906	0.3573315910	0.3573315910
1.5	1.470238095	1.468923827	1.468921319	1.468921320	1.468921320

Si comenzamos por el punto $x_0 = 1$, el algoritmo se para. Explica el comportamiento del método en estos tres casos. (2 puntos)