Cálculo numérico (Ingeniería Industrial)

12 septiembre 2003 — Tercera convocatoria (septiembre)

Ejercicio 1 Si $a \in [1/2, 1]$, para resolver la ecuación $a = 1/x$, se aplica la siguiente iteración funcional (que no necesita hacer divisiones):

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n\,(2 - a\,x_n)$$

a) ¿Cuál es su orden de convergencia para un x_0 adecuado?. *(0.75 ptos)*

b) ¿Cuántas iteraciones serán necesarias para obtener el punto fijo con un error absoluto menor que 10^{-8}. *(0.75 ptos)*

c) Realizar las iteraciones necesarias para obtener una aproximación al punto fijo con la tolerancia indicada en el apartado anterior, tomando $a = 0.8$ y $x_0 = 1.1$. ¿Cuántas operaciones aritméticas son necesarias?. *(1 pto)*

Ejercicio 2 Dada una función $f \in C^3(\mathbb{R})$ y los nodos $x_0 = a - 2h$, $x_1 = a - h$ y $x_2 = a$ con $h > 0$ y $a \in \mathbb{R}$, se pide:

a) Calcular el polinomio de interpolación de $f(x)$ utilizando los nodos anteriores. *(1 pto)*

b) Utilizando el polinomio de interpolación calculado, obtener las fórmulas

$$f'(a) \simeq \frac{3f(a) - 4f(a-h) + f(a-2h)}{2h},$$

$$f''(a) \simeq \frac{f(a) - 2f(a-h) + f(a-2h)}{h^2}.$$

(1 pto)

c) Calcular la expresión del error y el orden de la fórmulas anteriores. *(1 pto)*

Ejercicio 3 Se considera el PVI:

$$y' = -\,y + t + 1, \quad t \in [0,1], \quad y(t_0) = y_0$$

y los métodos de Runge-Kutta definidos por sus tablas de Butcher

$$M1: \quad \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ 1 & 1 & \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array} \qquad M2: \quad \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ 2/3 & 2/3 & \\ \hline & 1/4 & 3/4 \end{array}$$

a) Escribe las ecuaciones de ambos métodos y encuentra el orden del segundo. *(1.5 pto)*

b) Comprueba que los dos métodos RK aplicados al PVI anterior dan las mismas aproximaciones para toda elección de h. *(1 pto)*

Ejercicio 4 Se desea resolver el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 + \dfrac{1}{n^2} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - \dfrac{1}{n^2} \end{pmatrix},$$

con $n = 100$. Para ello se propone resolver el sistema $Ax = \tilde{b} = (1,2)^T$.

a) Estudiar el condicionamiento de A para cualquier número natural n, por medio de la norma infinito. *(1 punto)*

b) Utilizando el condicionamiento de la matriz A con $n = 100$, estimar el error relativo que se puede cometer en la solución. *(1 punto)*

Soluciones

1.a)

$$g(x) = x\,(2-x) \quad \Longrightarrow g'(x) = 2\,(1-ax) \quad \Longrightarrow g'(\alpha) = 0$$

$$g''(x) = -2\,a \neq 0$$

Por lo tanto, el método es de orden 2

1.b)

$$e_{n+1} = |x_{n+1} - \frac{1}{a}| = |x_n\,(2-a\,x) - \frac{1}{a}| = a\,(x_n - \frac{1}{a})^2 = a\,e_n^2 = a^2\,e_{n-1}^4 = ... = a^{n+1}\,e_0^{2n}$$

Por lo tanto,

$$e_n < 10^{-8}, \quad \text{si } a^n\,e_0^{2(n-1)} < \frac{1}{2}^{2(n-1)} < 10^{-8},$$

es decir, si

$$10^8 < 2^{2n-2} \quad \longrightarrow n \geq 15$$

1.c)

$$g[x] = x(2-0.8x), \quad x_0 = 1.1, \quad a = 0.8$$

k	$abs(g(x) - 1.25)$
1	0.018
2	0.0002592
3	$5.3747712 * 10^{-8}$
4	$2.44249065 * 10^{-15}$

Serán necesarias 3 operaciones aritméticas por iteración, en total 12 .

2.a)

x_k	$f(x_k)$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$
$x_0 = a - 2h$	$f(x_0)$	$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{h}$	$\frac{f(x_2)-2f(x_1)+f(x_0)}{2h^2}$
$x_1 = a - h$	$f(x_1)$	$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{h}$	
$x2 = a$	$f(x_2)$		

$$P_2(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1)-f(x_0)}{h}\,(x-x_0) + \frac{f(x_2)-2f(x_1)+f(x_0)}{2h^2}\,(x-x_0)\,(x-x_1)$$

2.b)

$$P_2'(x) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{h} + \frac{f(x_2)-2f(x_1)+f(x_0)}{2h^2}\,(2x - x_0 - x_1)$$

$$P_2''(x) = \frac{f(x_2)-2f(x_1)+f(x_0)}{h^2}$$

Por lo tanto,

$$f'(a) \simeq P_2'(a) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{h} + \frac{f(x_2)-2f(x_1)+f(x_0)}{2h^2}\,(2a - x_0 - x_1) = \frac{3f(a)-4f(a-h)+f(a-2h)}{2h}$$

$$f''(a) \simeq \frac{f(a)-2f(a-h)+f(a-2h)}{h^2}.$$

$$f''(a) \simeq P_2''(x) = \frac{f(x_2)-2f(x_1)+f(x_0)}{h^2} = \frac{f(a)-2f(a-h)+f(a-2h)}{h^2}.$$

2.c) Por la teoría de interpolación,

$$f(x) = P_2(x) + E(x), \quad \text{con } E(x) = \frac{f'''(\psi)}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$f'(x) = P_2'(x) + E'(x), \quad \text{y } f''(x) = P_2''(x) + E''(x)$$

$$E'(x) = \frac{f'''(\psi)}{3!}[(x - x_1)(x - x_2) + (x - x_0)(x - x_2) + (x - x_0)(x - x_1)$$

$$E''(x) = \frac{f'''(\psi)}{3!}[2(x - x_0) + 2(x - x_1) + 2(x - x_2)$$

Evaluando en el punto $x = a$, resulta:

$$E'(a) = \frac{f'''(\psi)}{3!}[(a - x_1)(a - x_2) + (a - x_0)(a - x_2) + (a - x_0)(a - x_1) = \frac{f'''(\psi)}{3!}\,h^2 = (O(h^2)$$

luego el orden de la fórmula de derivación es 2.

$$E''(a) = \frac{f'''(\psi)}{3!}[2(a - x_0) + 2(a - x_1) + 2(a - x_2) = \frac{f'''(\psi)}{3!}\,6\,hf'''(\psi)\,h = O(h)$$

luego el orden de la fórmula de derivación es 1.

También se puede realizar utilizando desarrollos en serie de Taylor, obteniendo el mismo resultado.

3.a)

$$M_1 : y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(t_n, y_n) + f(t_n + h, y_n + hf(t_n, y_n))]$$

$$M_2 : y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}[f(t_n, y_n) + 3f(t_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hf(t_n, y_n))]$$

La función incremento es: $\phi(y_n, h) = \frac{1}{4}[f(t_n, y_n) + 3f(t_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hf(t_n, y_n))]$

Desarollandola en serie de Taylor, o bien, imponiendo las condiciones de orden de un Runge-Kutta se obtiene:

$$b^T\ e = (1/4\ 3/4)\,(1\ 1) = 1$$

$$b^T\ c = (1/4\ 3/4)\,(0\ 2/3) = 1/2$$

Luego el orden es 2, pues un método Ruge-Kutta explícito de dos etapas es de orden ≤ 2.

3.b) M_1:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[-y_n + t_n + 1 + (1 - h)(-y_n + t_n + 1)] = ...$$

$$... = y_n + (h - \frac{h^2}{2})\ (y_n + t_n + 1) + \frac{h^2}{2}$$

M_2:

$$y_{n+1} = \frac{h}{4}[-y_n + t_n + 1 + 3(-y_n + t_n + 1)(1 + -\frac{2h}{3} + 2h] = ...$$

$$... = y_n + (h - \frac{h^2}{2})\ (y_n + t_n + 1) + \frac{h^2}{2}$$

4.a)

$$cond_{\infty}(A) = \|A\|_{\infty} \, \|A^{-1}\|_{\infty}$$

$$\|A\|_{\infty} = max\{1+2, 2+4+1/n^2\} = 6+1/n^2$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1+4n^2 & -2n^2 \\ -2n^2 & n^2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \|A^{-1}\|_{\infty} = max\{1+6n^2, 3n^3\} = 1+6n^2$$

Por lo tanto, $cond_{\infty}(A) = (6+1/n^2)(6+1/n^2) = 36n^2 + 12 + 1/n^2$

4.b) Para $n = 100$,

$$cond_{\infty}(A) = 36 * 10^4 + 12 + 10^{-4} = 350012.0001$$

$$\Delta b = (0\, 10^{-4})^T \Longrightarrow \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = \frac{1}{2n^2-1} = \frac{1}{19999}$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq cond_{\infty}(A) \, \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = 17.0015$$