Cálculo numérico (Ingeniería Industrial, Informática y Química)

Grupo rotado

25 de junio de 2009 Primera convocatoria

Ejercicio 1

a) Encontar una fórmula de cuadratura de Newton-Côtes con tres nodos para el cálculo de la integral $\int_a^b f(x)\,dx$. ¿Es única?. Dar una expresión del error. *(6 puntos)*

b) Utilizando como base la fórmula compuesta de Simpson, aplicar el método de Romberg una vez (es decir, el método de extrapolación de Richardson) para encontrar una fórmula que permita calcular la integral

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

¿De qué orden es la fórmula obtenida? *(8 puntos)*

c) Utilizando como base la fórmula compuesta de Simpson, aplicar el método de Romberg dos veces para calcular la integral

$$I = \int_{-2}^{2} \left|\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}\,x)\right|\,dx$$

y dar una estimación del error cometido. *(9 puntos)*

Ejercicio 2

Se pretende analizar una estrategia para la resolución del sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$A\,x = b, \qquad A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) Describir las características más interesantes de la matriz de coeficientes y, en consecuencia, establecer una estrategia para la resolución del sistema anterior. *(9 puntos)*

b) Critica numéricamente la afirmación siguiente: "En este caso, el método numérico más aconsejable es el de relajación con parámetro $\omega = \dfrac{2}{1+\sqrt{1-(1/2)^2}}$ ". *(9 puntos)*

Ejercicio 3

Se considera el método de la potencia para hallar valores y vectores propios de una matriz, y la matriz A del ejercicio anterior.

a) Sabiendo que una matriz real y simétrica no puede tener valores propios complejos, encontrar un intervalo real que contenga a todos los valores propios de A. *(6 puntos)*

b) Justificar que el método de la potencia se puede aplicar en este caso. *(8 puntos)*

c) ¿Qué diferencias hay entre aplicar el método de la potencia con A simétrica y con A no simétrica?. *(9 puntos)*

c) Aplicar dos iteraciones de un método iterativo conducente a encontrar el valor propio más cercano a 2. *(10 puntos)*

Ejercicio 4

Se considera la ecuación: $f(x) = 1 - x - x^2 + x^3 = 0$ que tiene las raíces $\alpha_1 = -1$ simple y $\alpha_2 = 1$ doble y los métodos de iteración funcional definidos por las funciones de iteración:

$$g_1(x) = 1 - x^2 + x^3 \qquad \text{y} \qquad g_2(x) = \frac{1 + x + 2x^2}{1 + 3x}$$

a) Encontrar, si existe, un intervalo de convergencia a alguna de las raíces para cada una de las g's. *(8 puntos)*

b) Justificar que la convergencia de la $x_{n+1} = g_2(x_n)$ es lineal a la raiz α_2 y cuadrática a la α_1. *(8 puntos)*

c) Conseguir que la convergencia de la $x_{n+1} = g_2(x_n)$ a la raiz α_2 sea también cuadrática. *(8 puntos)*

Soluciones

1.a) Los nodos serán: a, a+h, a+2 h = b. La fórmula de cuadratura será:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq b0f(a) + b1f(a+h) + b2f(a+2h)$$

Ecuaciones para orden 3:

$$\begin{aligned} b0 + b1 + b2 &= 2h \\ b0 * a + b1 * (a+h) + b2 * (a+2h) &= \frac{1}{2}\left(-a^2 + (a+2h)^2\right) \\ b0 * a^2 + b1 * (a+h)^2 + b2 * (a+2h)^2 &= \frac{1}{3}\left(-a^3 + (a+2h)^3\right) \end{aligned}$$

La matriz de coeficientes es de Vandermonde, luego hay solución única.

$$b0 = \frac{h}{3}, \quad b1 = \frac{4\,h}{3}, \quad b2 = \frac{h}{3},$$

Por lo tanto, se trata de la fórmula de Simpson.

El error cf. Burden. También se puede obtener integrando la expresión del error en la fórmula de interpolación o aplicando el problema 8.11 de la colección.

1.b) La fórmula compuesta de Simpson es:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(f_0 + 4\sum_{k=1}^{n/2} f_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{n/2-1} f_{2k} + f_n\right), \quad E[f] = -\frac{b-a}{180}\,h^4\,f^{(4)}(\xi)$$

La aplicación una vez de la fórmula de Romberg da:

$$\begin{aligned} I_{00} &= \frac{h/2}{3}\,2\,\left(f_0 + 4f_2 + f_4\right), \quad h = \frac{b-a}{2}, \\ I_{10} &= \frac{h/2}{3}\,\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4\right) \end{aligned}$$

y, en consecuencia,

$$I_{11} = \frac{4\,I_{10} - I_{00}}{3} = \frac{h}{9}\,\left(f_0 + 8f_1 + 8f_3 + f_4\right)$$

El error en cada aplicación del método de Romberg se multiplica por h^2, así que será del orden de h^6, ya que en la fórmula compuesta de Simpson es $\mathcal{O}(h^4)$

1.c) Observar que la función integrando, aunque tiene el origen como punto d discontinuidad de la derivada, es integrable Riemann en el intervalo. Así que aplicando la fórmula compuesta de Simpson con $h = \dfrac{b-a}{2} = 2$ resulta:

$$\begin{aligned} I_{00} &= \frac{2}{3}\,\left(f(-2) + 4f(0) + f(2)\right) = \frac{2}{3}\,(0 + 4.0 + 0) = 0 \\ I_{10} &= \frac{h/2}{3}\,\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4\right) = \frac{1}{3}\,\left(f(-2) + 4f(-1) + 2f(0) + 4f(1) + f(2)\right) = \\ &\qquad \frac{1}{3}\,(0 + 4.1 + 2.0 + 4.1 + 4.0) = \frac{8}{3} \\ I_{11} &= \frac{4\,I_{10} - I_{00}}{3} = \frac{4\,\frac{8}{3} - \frac{16}{3}}{3} = \frac{16}{9}, \quad err \approx |I_{00} - I_{11}| = \frac{32}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{20} &= \frac{1}{6}\,\left(f(-2) + 4f(-3/2) + 2f(-1) + 4f(-1/2) + 2f(0) + 4f(1/2) + 2f(1) + 4f(3/2) + f(2)\right) = 2.55 \\ I_{21} &= \frac{4\,I_{20} - I_{10}}{3} = 2.514157 \\ I_{22} &= \frac{16\,I_{21} - I_{11}}{15} = 2.444730 \end{aligned}$$

2a) A es simétr., tridiag., diag. bloq, diag. dom., definida positiva, hueca con 14/25 elementos nulos, es decir, 56 %

Teniendo en cuenta estas características:
a) Por ser hueca, utilizar un método iterativo. Como es simétrica y tridiagonal, el método SOR con parámetro óptimo.
b) Por ser simétrica, el método de factorización L D L^T
c) Por ser simétrica definida positiva, el método de Choleski

2b) Es cierto, ya que la matriz es hueca y simétrica diagonal dominante y se aconseja usar el método SOR con parámetro óptimo

$$\omega^* = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(J)^2}}$$

Como

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

y $\rho(J) = 1/2$, resulta el ω^* dado.

3.a) Como A es diagonal por bloques, los valores propios de A son la unión de los valores propios de cada bloque.
Un intervalo que contenga a todos es la unión de los intervalos que contienen a los de los dos bloques. Por Gershgorin, I = [2, 6]∪[1,3] = [1,6]

3.b) Como la matriz es de elementos reales y simétrica es diagonalizable (es decir, existe una base de vectores propios). Entonces, se podrá aplicar el método de la potencia porque uno de los valores propios será dominante, aunque sea múltiple. Habrá que escoger un vector inicial adecuado.

El valor propio dominante de A será el mayor (en valor absoluto) de los dominates de cada bloque.

3.c) Caso de que la matriz sea simétrica, el método de la potencia y sus variantes se pueden aplicar teniendo en cuenta dicha simetría o no. La diferencia es que la convergencia es del orden $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ en el caso no simétrico, mientras que es $\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}$ en el cas simétrico.

En ambos casos se puede acelerar la convergencia con el Δ^2 de Aitken.

3.d) Utilizamos el método de la potencia inversa para matrices no simétricas y simétricas con desplazamiento q = 2 para localizar el valor propio que se pide del bloque A_{11} y del A_{22}.

```
Caso no simetrico:
q=2;  x0 = (1, 2, 2); p0 = 2;x=x / x[[p0]]
ap = a11 - q*IdentityMatrix[3]
 y = LinearSolve[ap, x]; mu = mu=1/y[[p0]] + q

1, 10/3
2, 36/13 = 2.769230

Caso simetrico:
q=2;  x0 = (1, 1, 1);
ap = a11 - q*IdentityMatrix[3]
```

```
x = y/Sqrt[y.y]; y = LinearSolve[ap, x]; mu = x.y; mu = 1/mu + q

1, 3.5
2, 2.72727272727273
```

4.a) Como ambas funciones de iteración son derivables, debemos imponer que

$$|g_1'(x)| < 1, \qquad |g_2'(x)| < 1,$$

es decir,

$$-1 < g_1'[x] < 1 \Longleftrightarrow -\frac{1}{3} < x < 1$$

$$-1 < g_2'[x] < 1 \Longleftrightarrow x < -0.754970354689117 \quad \text{ó } x > 0.0883036880224506$$

En consecuencia, la g_1 solo puede converger a α_2; en cambio, la g_2 puede hacerlo a las dos raíces.

Como $g_1'(1) = 1 \neq 0$, un intervalo puede ser: [1 - ϵ, 1] para g_1 y α_2 Como $g_2'(-1) = 0$, un intervalo puede ser: [-1 - ϵ, -1+ϵ] para g_2 y α_1

Como $g_2'(1) = 1/2 \neq 0$, un intervalo puede ser: [1 - ϵ, 1+ϵ] para g_2 y α_2

4.b) Como $g_2'(1) = 1/2 \neq 0$ la convergencia es lineal, mientras que $g_2'(-1) = 0$ luego la convergencia es al menos cuadrática.

4.c) Teniendo en cuenta que $g_2(x) = x - \dfrac{f[x]}{f'[x]}$, es decir, que este método de iteración funcional es el de Newton-Raphson, y que la raíz α_2 es de multiplicidad 2, basta, por ejemplo, considerar la siguiente modificación:

$$x_{n+1} = x_n - 2\,\frac{f[x_n]}{f'[x_n]}$$

Otra forma de conseguirlo es considerar el método Δ^2 de Aitken en la forma de Steffensen.