Cálculo numérico (Ingeniería Industrial, Informática y Química)

5 de junio de 2008 Primera convocatoria

Ejercicio 1

Se considera el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$A\,x = b, \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Apoyándose en el teorema de Gershgorin, deducir que es posible aplicar el método de Choleski para resolver el sistema. *(2 puntos)*

b) Obtener la factorización de Choleski de la matriz A y utilizarla para resolver el sistema. *(3 puntos)*

Ejercicio 2

Se considera el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$A\,x = b, \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Discutir la convergencia de los métodos iterativos de Jacobi y de Gauss-Seidel para la resolución del sistema. ¿Cuál de ellos es convergente?. Si ambos son convergentes, ¿cuál converge más deprisa? *(6 puntos)*

b) Utilizar el método de la potencia (sólo dos iteraciones) para encontrar el radio espectral de la matriz de iteración del método de Jacobi. *(4 puntos)*

Ejercicio 3

a) Probar que si g interpola a f en los nodos $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$ y h interpola a f en los nodos $x_1, x_2, ..., x_n$, entonces, la función

$$g(x) + \frac{x_0 - x}{x_n - x_0}\,(g(x) - h(x))$$

interpola a f en los nodos $x_0, x_1, ..., x_n$ (g y h no necesitan ser polinomios) *(5 puntos)*

b) Encontrar el polinomio de interpolación de Lagrange g(x) en los nodos $\{x_0, x_1, x_2\}$ y el polinomio de interpolación de Lagrange en los nodos $\{x_1, x_2, x_3\}$ y aplicar el apartado anterior para obtener el polinomo de interpolación en los nodos $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ de una función f(x) definida por la tabla siguiente:

$$x = -1, 0, 1, 2$$
$$f = 2, -1, 0, 5$$

(5 puntos)

c) Encontrar el polinomio de interpolación de Lagrange para la tabla siguiente:

$$x = -1, 0, 1, 2, 3$$
$$f = 2, -1, 0, 5, 14$$

Comparar con el resultado obtenido en el apartado anterior y explicar el resultado *(5 puntos)*

$\boxed{\textbf{Ejercicio 4}}$

Para obtener la integral

$$\int_0^4 e^x \operatorname{sen} x \, dx$$

se quieren utilizar los siguientes métodos: a) fórmula de Simpson, b) fórmula compuesta del trapecio, c) cuadratura de Romberg, d) fórmula de Gauss-Legendre.

Diseñar una práctica en la que se vea cómo se deben aplicar, cuál es el más aconsejable, dando el error en cada caso. *(10 puntos)*

Soluciones

1.a) La matriz es simétrica y diagonal dominante, luego es definida positiva y, por lo tanto, el método de Choleski se puede aplicar. No obstante, aplicando el teorema de Gershgorin, los círculos son:

$$C_1 = \{x||x-2| < 1\}, \quad C_2 = \{x||x-4| < 1\}, \quad C_3 = \{x||x-3| < 2\}$$

Por lo que todos los valores propios están en el intervalo [1, 5], es decir, es definida positiva.

1.b) Efectuando la factorización $A = L\,U$, resulta

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1/4 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 9/4 \end{bmatrix}$$

La factorización de Choleski es: A = C C^T, siendo C = L $\mathrm{D}^{1/2}$. Por lo tanto,

$$D^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix}, \quad C^T = D^{1/2} L^T = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix}$$

Resolviendo, ahora, los dos sistemas triangulares: C z = b, C^T x = z, resulta la solución $(7/9, 1/9, 5/9)$.

Observar que esta factorización puede obtenerse mediante el método de Iserles.

2.a) Hay que construir la matriz de iteración de ambos métodos.

A = M - N, A = D - L - U, B = M^{-1} N

Para el método de Jacobi: M = D, N = L + U, J = D^{-1} (L + U)

Para el método de Gauss-Seidel: M = D- L, N = U, G = $(\mathrm{D - L})^{-1}$ U

En concreto:

$$J = D^{-1}\,(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/4 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = (D-L)^{-1}\,U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Aplicando el teorema de Gershgorin, el radio espectral de ambas matrices es menor que uno, por lo que ambos métodos son convergentes.

Para ver cuál converge más deprisa hay que calcular dicho radio espectral (máximo de los valores propios): $\rho(J) = 1/2$, $\rho(G) = 1/4$. Por lo tanto, el método de Gauss-Seidel converge más rápidamente.

2.b) Para aplicar el método de la potencia hace falta que haya un valor propio dominante y que exista una base de vectores propios. En estas condiciones, tomando un vector inicial cualquiera se procede en la forma siguiente:

Tomamos, por ejemplo, $x = (1, 2, 1)$ Dividimos por su norma de Chebyshev, $||x|| = 2$, para obtener

$$x_0 = (1/2, 1, 1/2), \qquad p_0 = 2, \qquad \mu_0 = 2$$

Ahora calculamos:

$$y_1 = J\,x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/4 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ -1/8 \\ -1/6 \end{bmatrix}$$

Con lo que: $\mu_1 = -1/8$, $p_1 = 1$, $x_1 = (1, -1/2, -2/3)$

Ahora calculamos:

$$y_2 = J\,x_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/4 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1/6 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Con lo que: $\mu_2 = -1/3, \quad p_2 = 3, \quad x_2 = (-2/3, 1/3, 1)$

3.a) Basta comprobar que la nueva función

$$k(x) = g(x) + \frac{x_0 - x}{x_n - x_0}\,(g(x) - h(x))$$

cumple las condiciones de interpolación, es decir, $k(x_j) = f(x_j), j = 0, 1, 2, ..., n$

En efecto:

$$\begin{aligned} k(x_0) &= g(x_0) + \frac{x_0 - x_0}{x_n - x_0}\,(g(x_0) - h(x_0)) = g(x_0) = f(x_0) \\ k(x_j) &= g(x_j) + \frac{x_0 - x_j}{x_n - x_0}\,(g(x_j) - h(x_j)) = g(x_j) = f(x_j) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{para } j = 1, 2, ..., n-1 \\ k(x_n) &= g(x_n) + \frac{x_0 - x_n}{x_n - x_0}\,(g(x_n) - h(x_n)) = h(x_n) = f(x_n) \end{aligned}$$

3.b) La tabla de diferencias divididas es:

x	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
-1	2	-3	2	0	0
0	-1	1	2	0	
1	0	5	2		
2	5	9			
3	14				

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} g(x) &= 2 - 3(x+1) + 2(x+1)x \\ h(x) &= -1 + x + 2x(x-1) \\ k(x) &= g(x) + \frac{x_0 - x}{x_n - x_0}\,(g(x) - h(x)) = -1 - x + 2\,x^2 \end{aligned}$$

3.c) Utilizando la tabla completa de diferencias divididas anterior resulta el mismo polinomio de grado 2. Tiene sentido, ya que el polinomio encontrado pasa por los puntos (2, 5) y (3, 14). Es decir, estos dos nodos no añaden ninguna información a la dada por los restantes nodos.

4) Diseño de la práctica:

a) Explicar cuales son los cuatro métodos y cómo se determinan los errores.

b) Explicar que algunos son convergentes y otros no

c) Explicar cómo aplicarlos en función del número de nodos

d) Encontrar una cota de la derivada adecuada de la función integrando

e) Comparar los errores cometidos en función de n